PENYELESAIAN PERSAMAAN TRIGONOMETRI MENGGUNAKAN RUMUS EULER PADA BILANGAN KOMPLEKS

Hendra Cipta

Dosen FKIP Matematika Universitas Al-Washliyah (Univa) Medan

hendra_89cipta@yahoo.co.id

ABSTRAK

Tulisan ini membahas penyelesaian $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ menggunakan rumur Euler pada bilangan kompleks dimana rumus Euler diturunkan dari Deret Taylor dengan mengambil $e^x = e^{i\theta}$ sehingga diperoleh bentuk rumus Euler dalam menyelesaikan $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$.

Kata Kunci : Rumus Euler, deret Taylor

I. PENDAHULUAN

Rumus Euler dinamakan untuk Leonhard Euler merupakan rumus matematika dalam analisis kompleks yang menunjukkan hubungan mendalam antara fungsi trigonometri dan fungsi eksponensial. Rumus Euler menyatakan bahwa, untuk setiap bilangan real x, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ dimana e merupakan basis logaritma natural, i unit imajiner, sin dan cos merupakan fungsi trigonometri (Priestley, 1993).

Rumus Euler banyak digunakan dalam penyelesain masalah matematika terutama pada masalah bilangan kompleks. Disini penulis akan menyeselesaikan masalah $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ menggunakan rumus Euler pada bilangan kompleks.

II. PEMBAHASAN

Dalam hal ini untuk mendapatkan penurunan rumus Euler, penulis akan menguraikan norm dan argmen berdasarkan Deret Taylor yakni:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad \text{(Richard, 1965)}$$

Dengan mengambil $e^x = e^{i\theta}$ maka dengan mengikuti deret Taylor diperoleh

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \frac{1}{5!}(i\theta)^5 + \frac{1}{6!}(i\theta)^6 + \frac{1}{7!}(i\theta)^7 + \ldots$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \frac{1}{5!}(i\theta)^5 + \frac{1}{6!}(i\theta)^6 + \frac{1}{7!}(i\theta)^7 + \ldots$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - i\frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + i\frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{6!}\theta^6 - i\frac{1}{7!}\theta^7 + \ldots$$

$$e^{i\theta} = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \ldots\right)}_{\cos\theta} + i\underbrace{\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \ldots\right)}_{\sin\theta}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad (1)$$

III. HASIL PENELITIAN

Pada bagian ini akan dibuktikan bahwa $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ dengan menggunakan rumus Euler. Sebelum itu akan dibuktikan bahwa $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Dengan mengambil persamaan (1) $e^{i\theta} = \sin\theta + i\sin\theta$ dan $e^{-i\theta} = \sin\theta - i\sin\theta$ maka

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = (\sin\theta + i\sin\theta) - (\sin\theta - i\sin\theta)$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad (2)$$

Sekarang substitusikan persamaan (2) ke persamaan $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$, sehingga diperoleh:

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

$$= 3\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right) - 4\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3$$

$$= \left(\frac{3e^{i\theta}-3e^{-i\theta}}{2i}\right) - 4\left(\frac{e^{i\theta+i\theta+i\theta} - e^{i\theta-i\theta+i\theta} - e^{-i\theta+i\theta+i\theta} + e^{-i\theta-i\theta+i\theta} - e^{i\theta+i\theta-i\theta} + e^{i\theta-i\theta-i\theta} + e^{-i\theta+i\theta-i\theta} - e^{i\theta-i\theta-i\theta}}{-8i}\right)$$

$$= \left(\frac{3e^{i\theta}-3e^{-i\theta}}{2i}\right) + \left(\frac{e^{3i\theta} - e^{i\theta} - e^{i\theta} + e^{-i\theta} - e^{i\theta} + e^{-i\theta} + e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i}\right)$$

$$= \left(\frac{3e^{i\theta}-3e^{-i\theta}}{2i}\right) + \left(\frac{e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i}\right)$$

$$= \frac{3e^{i\theta} - 3e^{-i\theta} + e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i}$$

$$= \frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i}$$

$$\sin 3\theta = \sin 3\theta$$

sehingga dapat ditunjukkan bahwa $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$.

KESIMPULAN

Telah dibuktikan dengan menggunakan rumus euler dengan mensubstitusikan $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ kedalam persamaan $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ sehingga diperoleh hasil bahwa $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$.

DAFTAR PUSTAKA

Courant, Richard and Fritz John, 1965, *Introduction To Calculus And Analysis,* New York University Interscience Publishers.

Priestley, HA (1993).*Pengantar Analisis Kompleks,* . Terjemahan Suryanto, Penerbit ITB, Bandung.

Purcell, EJ, Varberg,D (1997). *Calculus*. Prentice-Hall,Inc., USA.

Soedojo, P (1995). *Matematika Fisika dan Teknik, Ga*djah Mada, University Press, Yogyakarta.

Spiegel, MR (1997).*Kalkulus Lanjutan,*. Penerbit Erlangga, Jakarta.