**CARA LAIN PEMBUKTIAN TEOEMA ARZELA-ASCOLI DAN HUBUNGANNYA DENGAN EKSISTENSI PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL (SUATU KAJIAN TEORITIS)**

Sufri

Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jambi Kampus Pinang Masak
Jl. Raya Jambi-Ma.Bulian KM.15 Mendalo Darat Jambi 36361

ABSTRAK

Tujuan utama dari tulisan ini adalah untuk mengetahui cara lain dalam membuktikan teorema Arzela–Ascoli sehingga memudahkan untuk memahami substansi dari teorema tersebut. Teorema Azela-Ascoli dapat dijadikan dasar untuk memahami tentang eksistensi penyelesaian suatu persamaan diferensial. Teorema Azela-Ascoli berbunyi sebagai berikut : Misalkan K **ruang metrik kompak**, $f_n$ fungsi bernilai nyata (real) kontinu pada K, dan $\langle f_n \rangle$ barisan **terbatas titik demi titik** dan **ekuikontinu** pada K, maka (i). $\langle f_n \rangle$ **terbatas seragam** pada K, (ii). $\langle f_n \rangle$ memuat sub-barisan yang **konvergen seragam** pada K. Dalam tulisan ini akan dibuktikan bagian (i) dan (ii). Khusus bagian (ii) akan dibuktikan dengan cara lain setelah dibuktikan dengan cara yang konvensional. Selanjutnya teorema ini akan dikaitkan dengan **teorema Peano** dengan tujuan untuk memahami peranan kedua teorema tersebut terhadap eksistensi penyelesaian persamaan diferensial.

Kata-kata kunci : Ruang Metrik Kompak, Terbatas titik demi titik, Ekuikontinu, Terbatas seragam, dan konvergen seragam

## I. PENDAHULUAN

Teorema Arzela-Ascoli merupakan salah satu teorema penting dalam matematika analisis. Teorema Arzela-Ascoli bersama-sama dengan teorema Peano sering dikaitkan dengan eksistensi penyelesaian persamaan diferensial biasa.

Banyak pemasalahan dalam penyelesaian persamaan diferensial yang berbentuk :

$dy/dx = f(x,y)$ ............................................ (1)

dengan syarat awal

$y(x_o) = y_o$ ................................................. (2)

dengan f fungsi bernilai nyata (real) yang terdefinisi pada $R^2$. Penyelesaian persamaan (1) dengan syarat awal persamaan (2) dimaksudkan adalah suatu fungsi, katakan g dengan domain memuat suatu interval $[x_o - \delta , x_o + \delta]$, sehingga $g(x_o) = y_o$ dan

$g'(x) = f [x , g(x)]$, dengan $|x - x_o| < \delta$ (3)

Melalui pengintegralan persamaan (3) ekuivalen dengan,

$g(x) = y_o + \int f [t , g(t)]\, dt$,

dengan $|x - x_o| < \delta$ ..................................... (4)

dengan batas atas dan bawah integrasi berturut-turut adalah x dan $x_o$.

Berdasarkan uraian di atas muncul suatu pertanyaan tentang eksistensi dari penyelesaian persamaan (1) dan (2) apakah ekuivalen dengan eksistensi suatu fungsi, katakan g yang memenuhi persamaan (4) untuk suatu nilai $\delta$. Sekarang akan dicari syarat kecukupan bagi fungsi f yang menjamin adanya (eksistensi) dan ketunggalan dari fungsi g yang memenuhi persamaan (4).

## II. LANDASAN TEORI

Pada bagian ini terlebih dahulu dikemukakan beberapa pengertian tentang berbagai istilah yang berkaitan dengan fokus pembahasan.

**Definisi 1 :**

Misalkan $\Im$ keluarga fungsi yang memuat fungsi $f_i$ ; $i = 1,2,3,4,5, ...$ terdefinisi pada interval [a , b] dikatakan **terbatas seragam**, jika terdapat suatu bilangan $B > 0$, sedemikian hingga $|f_i (x)| < B$, untuk setiap $x \in [a , b]$ dan untuk setiap i. (Goldberg, 1976 dan Rudin 1976)

**Definisi 2 :**

Misalkan $\Im$ keluarga fungsi yang memuat fungsi $f_i$ ; $i = 1,2,3, ...$ terdefinisi pada interval tertutup [a , b] disebut **ekuikontinu** pada [a , b], jika diberi $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$, sehingga untuk setiap i, $f_i \in \Im$ dan $x, y \in [a , b]$ dengan $|x - y| < \delta$, berlaku $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. (Royden, 1989 dan Apostol, 1974 )

**Definisi 3 :**

Ruang Metrik $\langle M , \rho\rangle$ dikatakan **kompak** jika $\langle M , \rho\rangle$ lengkap dan terbatas total. (Goldberg, 1976 dan Soemantri, 1988)

**Definisi 4 :**

Misalkan himpunan A subset dari ruang metrik $\langle M , \rho\rangle$ dan $\varepsilon > 0$. Suatu himpunan berhingga $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n \}$ disebut suatu **jaringan epsilon ($\varepsilon$ - net)** untuk himpunan X, jika untuk setiap titik $a \in A$, terdapat $x' \in X$, sedemikian hingga $d(a , x') < \varepsilon$. (Simon, 1963)

**Definisi 5 :**

Himpunan A subset dari ruang metrik $\langle M , \rho\rangle$ disebut **terbatas seragam**, jika A memiliki jaringan epsilon ($\varepsilon$ - net) untuk setiap $\varepsilon > 0$. (Simon, 1963)

Kelima definisi di atas akan digunakan sebagai dasar untuk membuktikan teorema-teorema yang berkaitan dengan fokus penelitian.

## III. PEMBAHASAN

Pembahasan dalam penelitian ini akan dimulai dengan membuktikan teorema-teorema berikut.

**Teorema 1** :

Keluarga fungsi $\Im$ yang memuat fungsi-fungsi kontinu $f_i$ ; $i = 1,2,3, ...$ terdefinisi pada interval [a , b] kompak relatif dalam ruang metrik C [a , b]

jika dan hanya jika $\Im$ terbatas seragam dan ekuikontinu.

**Bukti** :

Misalkan $\Im$ keluarga fungsi itu dan $f_i \in \Im$ adalah fungsi kontinu dan terdefinisi pada [a , b] untuk setiap i, akan dibuktikan $\Im$ kompak relatif dalam C [a , b], jika dan hanya jika $\Im$ terbatas seragam dan ekuikontinu.

(i). Dibuktikan syarat perlu yaitu, jika $\Im$ kompak relatif dalam C [a , b] maka $\Im$ terbatas seragam dan ekuikontinu.

Misalkan $\Im$ kompak relatif dalam C [a , b], maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\varepsilon$ - net berhingga $f_i$ ; $i = 1,2,3, ..., n$ dalam $\Im$. Karena $\Im$ adalah keluarga fungsi kontinu dan terdefinisi pada [a , b] maka untuk setiap i, $f_i \in \Im$ terbatas pada [a , b], artinya terdapat $B_i > 0$ sedemikian hingga $|f_i (x )| < B_i$ untuk setiap $x \in [a , b]$. Berdasarkan $\varepsilon$ - net jika diberikan sembarang $f \in \Im$, maka terdapat sekurang-kurangnya satu $g \in \Im$, sedemikian hingga :

$$d(f , g) = \text{maksimum } |f (x ) - g(x)| \leq \varepsilon/3,$$

untuk setiap $x \in [a , b]$

Karena $||f (x )| - |g(x)|| \leq |f (x ) - g(x)| < \varepsilon/3$, maka $|f (x )| \leq |g(x)| + \varepsilon/3 < B_i + \varepsilon/3 < B$, dengan $B = \text{maksimum } \{B_1, B_2, B_3, ..., B_n \} + \varepsilon/3$. Dengan demikian diperoleh pernyataan berikut, "terdapat $B > 0$, sehingga untuk setiap $x \in [a , b]$ dan untuk setiap $f_i \in \Im$ berlaku $|f (x )| < B$". Ini menunjukkan **$\Im$ terbatas seragam**.

Selanjutnya berikut ini akan ditunjukkan $\Im$ ekukontinu sebagai berikut, karena untuk setiap $f_i$ ( i

= 1, 2, 3, ..., n ) dalam $\varepsilon$ - net kontinu pada [a , b], maka $f_i$ kontinu seragam pada [a , b], ini berarti jika diberikan $\varepsilon > 0$ maka terdapat $\delta_i > 0$ dan untuk setiap $x_1, x_2 \in [a , b]$ dengan $|x_1 - x_2| < \delta_i$ berlaku $|f_i (x_1) - f_i (x_2)| \leq \varepsilon/3$. Selanjutnya jika diberikan sembarang $f \in \Im$, maka dapat dipilih $f_i$ sedemikian hingga $d (f , f_i ) < \varepsilon/3$ dan jika $|x_1 - x_2| < \delta$ dengan $\delta$ = minimum ($\delta_1, \delta_2, \delta_3, ..., \delta_n$ ), maka akan diperoleh ketidaksamaan berikut, $|f (x_1) - f (x_2)| \leq |f (x_1) - f_i (x_1)| + |f_i (x_1) - f_i (x_2)| + |f_i (x_2) - f (x_2)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$. Hasil terakhir ini menunjukkan keluarga fungsi $\Im$ **ekuikontinu pada [a , b]**.

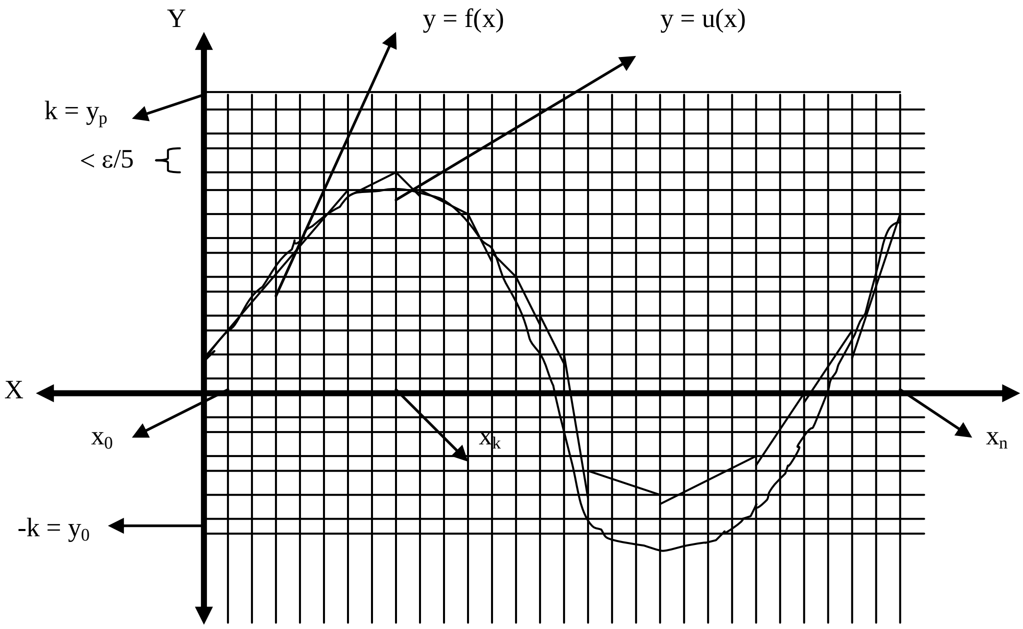
(ii). Dibuktikan syarat cukup, yaitu jika keluarga fungsi $\Im$ tebatas seragam dan ekuikontinu pada [a , b] maka keluarga fungsi $\Im$ kompak relatif dalam C [a , b].

Misalkan keluagra fungsi $\Im$ terbatas seragam dan ekuikontinu pada [a , b], menurut teorema untuk membuktikan keluarga fungsi $\Im$ kompak relatif dalam m C [a , b] cukup ditunjukkan keluarga fungsi $\Im$ terbatas total pada [a , b], artinya harus dapat ditunjukkan, apabila diberi $\varepsilon > 0$, maka terdapat $\varepsilon$ - net yang berhingga untuk keluarga fungsi $\Im$ dalam C [a , b].

Karena keluagra fungsi $\Im$ tebatas seragam dan ekuikontinu pada [a , b] maka diperoleh,

1. Terdapat $k > 0$, sehingga untuk setiap $x \in [a , b]$ dan $f \in \Im$ berlaku $|f (x)| < k$.
2. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka terdapat $\delta > 0$, sehingga untuk setiap $x_1 , x_2 \in [a , b]$ dan untuk setiap $f \in \Im$ dengan $|x_1 - x_2| < \delta$ berlaku $|f (x_1) - f (x_2)| < \varepsilon/5$.

Untuk menunjukkan eksistensi jaringan epsilon ($\varepsilon$ - net) berhingga untuk keluarga fungsi $\Im$ dalam C[a , b], interval [a , b] dibagi sepanjang sumbu X menjadi n subinterval yang panjngan setiap subinterval lebih kecil dari $\delta$. Sebut titik-titik ujung subinterval dengan $x_o , x_1 , x_2 , ..., x_n$ sehingga dapat ditulis, $a = x_o < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Melalui titik-titik ini dilukis garis-garis vertikal yang sejajar sumbu Y. Dengan jalan yang sama interval [-k , k] pada sumbu Y dibagi menjadi p subinterval yang panjang setiap subinterval lebih kecil dari $\varepsilon/5$. Sebut titik-titik ujung subinterval dengan $y_o , y_1 , y_2 , ... , y_p$ sehingga dapat ditulis, $-k = y_o < y_1 < y_2 < ... < y_p = k$. Melalui titik-titik ini dilukis garis-garis horizontal yang sejajar sumbu X. Dengan proses ini persegi panjang $a \leq x \leq b$ , $-k \leq y \leq k$ terpartisi menjadi np sel dengan sisi horizontalnya $< \delta$ dan sisi vertikalnya $< \varepsilon/5$, seperti yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini,




Setiap fungsi f $\in \mathfrak{I}$ dikaitkan dengan suatu garis poligon y = u(x), dengan y = u(x) berpuncak di titik-titik yang berbentuk $(x_k , x_l)$ dan di setiap titik $x_k \in [a , b]$ berlaku $|f(x_k) - u(x_k)| < \varepsilon/5$. Dengan demikian dapat ditulis,

(i). $|f(x_k) - u(x_k)| < \varepsilon/5$

(ii). $|f(x_{k+1}) - u(x_{k+1})| < \varepsilon/5$

(iii). $|f(x_k) - u(x_{k+1})| < \varepsilon/5$

Dengan mengkontruksi ketiga pertidaksamaan di atas diperoleh,

$|u(x_k) - u(x_{k+1})| \leq |u(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x_{k+1})| + |f(x_{k+1}) - u(x_{k+1})| < \varepsilon/5 + \varepsilon/5 + \varepsilon/5 = 3\varepsilon/5$.

Karena y = u(x) linier di antara titik-titik $x_k$ dan $x_{k+1}$, maka untuk setiap $x \in [x_k , x_{k+1}]$ akan berlaku $|u(x_k) - u(x)| < 3\varepsilon/5$.

Misalkan $x \in [a , b]$ dan $x_k$ pada sub interval yang paling dekat ke x dari kiri, maka dapat ditulis,

$$|f(x_k) - u(x)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - u(x_k)| + |u(x_k) - u(x)|$$

$< \varepsilon/5 + \varepsilon/5 + 3\varepsilon/5 = 5\varepsilon/5 = \varepsilon$

Ini menunjukkan himpunan garis-garis poligon y = u(x) membentuk $\varepsilon$-net bagi keluarga fungsi $\mathfrak{I}$. Karena setiap u nilainya ditentukan di (n+1) titik-titik $x_o$ , $x_1$ , $x_2$ , ..., $x_n$ , maka dengan demikian terdapat sejumlah berhingga garis-garis poligon y = u(x). Selanjutnya untuk setiap i, $u(x_i)$ harus merupakan salah satu dari (p+1) bilangan-bilangan $y_o$ , $y_1$ , $y_2$ , ... , $y_p$. Oleh karena itu terdapat paling banyak $(p+1)^{n+1}$ fungsi u. Artinya terdapat sejumlah berhingga cakram $V(u , \varepsilon/5)$ yang masing-masing berdiameter lebih kecil dari $\varepsilon$, dan gabungan semua cakram ini pasti memuat keluarga fungsi $\mathfrak{I}$. Ini menunjukkan keluarga fungsi $\mathfrak{I}$ terbatas total pada [a , b], dengan kata lain keluarga fungsi $\mathfrak{I}$ kompak relatif dalam C[a , b].

**Teorema 2 (Arzela-Ascoli)**

Jika K ruang metrik kompak, $f_n$ fungsi bernilai riil kontinu pada K, $\langle f_n \rangle$ barisan terbatas titik demi titik dan ekuikontinu pada K, maka (i). $\langle f_n \rangle$ terbatas seragam pada K, (ii). $\langle f_n \rangle$ memuat sub-barisan yang konvergen seragam pada K.

**Bukti**

**(i)**. Diberikan $\varepsilon > 0$, karena $\langle f_n \rangle$ ekuikontinu pada K, maka terdapat $\delta > 0$, sehingga untuk semua x dan y di dalam K dengan $d(x,y) < \delta$ dan untuk semua $n \in N$ berlaku,

$|f_n(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ ........................................ (1)

Karena K kompak maka terdapat titik-titik yang cacahnya berhingga, katakan $p_1, p_2, p_3, \dots, p_r$ yang semuanya dalam K, sehingga dapat ditulis,

$K \subset \bigcup_{i=1} N_\delta(p_i)$, dengan $N_\delta(p_i) = \{x \mid d(p_i, x) < \delta\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, r$.

Karena $\langle f_n \rangle$ terbatas titik demi titik pada K, maka terdapat bilangan riil $M_i$ sehingga $|f_n(p_i)| < M_i$ untuk semua $n \in N$.

Ambil $M$ = maksimum $\{M_1, M_2, M_3, \dots, M_r\}$ dan untuk sebarang $x \in K$ terdapat suatu i dengan $1 \le i \le r$ sehingga $x \in N_\delta(p_i)$. Jadi berdasarkan (1) berlaku $|f_n(x) - f_n(p_i)| < \varepsilon$ untuk semua $n \in N$. Dengan demikian untuk sembarang $x \in K$ dan sembarang $n \in N$ berlaku, $||f_n(x)| - |f_n(p_i)|| \le |f_n(x) - f_n(p_i)| < \varepsilon \Rightarrow |f_n(x)| < |f_n(p_i)| + \varepsilon < M + \varepsilon$.

Pertidaksamaan terakhir ini menunjukkan **$\langle f_n \rangle$ terbatas seragam pada K**, artinya (i) terbukti.

**(ii)**. Karena K ruang metrik kompak, maka K memuat subhimpunan terbilang yang rapat (dense) pada K. Karena $\langle f_n \rangle$ terbatas titik demi titik pada K dan E subhimpunan terbilang di dalam K maka $\langle f_n \rangle$ memuat suatu subbarisan, katakan $\langle f_{n_k} \rangle$ sehingga $\langle f_{n_k}(x) \rangle$ konvergen di setiap $x \in E$.

Misalkan $\varepsilon > 0$ dan ambil $\delta > 0$, karena E rapat dalam himpunan kompak K, maka terdapat titik-titik anggota E yang cacahnya berhingga, sebut saja dengan $x_1, x_2, \dots, x_s$, sehingga dapat ditulis,

$K \subset \bigcup N(x_i)$ .................................................. (2)

Guna memudahkan penulisan sebut $f_{n_k} = h_k$. untuk membuktikan subbarisan $\langle h_k \rangle$ konvergen seragam pada K dapat ditunjukkan dengan argumentasi berikut. Karena $\langle h_k \rangle$ konvergen di setiap titik anggota E, maka masing-masing barisan bilangan $\langle h_k(x_1) \rangle$, $\langle h_k(x_2) \rangle$, $\langle h_k(x_3) \rangle$, ... , $\langle h_k(x_n) \rangle$ adalah konvergen. Menurut kriteria **Cauchy** sesuai dengan $\varepsilon > 0$ di atas terdapat P, sehingga untuk $n \ge P$ dan $m \ge P$, berlaku

$|h_n(x_j) - h_m(x_j)| < \varepsilon$., untuk $j = 1, 2, 3, \dots, s$ ..... (3)

Berdasarkan (2) untuk sembarang $x \in K$ terdapat suatu q dengan $1 \le q \le s$, sehingga $x \in N_\delta(x_q)$, juga berdasarkan (1) dan karena $h_k$ adalah suatu fungsi anggota barisan $\langle f_n \rangle$ tentu berlaku,

$|h_k(x) - h_k(x_q)| < \varepsilon$., untuk setiap $k \in N$ (4)

Jika $n \ge p$ dan $m \ge p$ dan dengan memperhatikan (3) dan (4) diperoleh, $|h_n(x) - h_m(x)| \le |h_n(x) - h_n(x_q)| + |h_n(x_q) - h_m(x_q)| + |h_m(x_q) - h_m(x)| < \varepsilon + < \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$. Dengan demikian dapat dikatakan, untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat p sedemikian hingga untuk setiap $n \ge p$, $m \ge p$, dan $x \in K$ berlaku, $|h_n(x) - h_m(x)| < 3\varepsilon$. Hal ini menunjukkan barisan $\langle f_{n_k} \rangle = \langle h_k \rangle$ konvergen seragam pada K.

**Bukti lain dari (ii)**

Diberikan $\varepsilon > 0$, Karena K kompak, maka terdapat subhimpunan terbilang katakan E yang rapat dalam K ($E \subset K$). Oleh karena itu terdapat $x_1, x_2, x_3, \dots, x_s \in E$, sehingga dapat ditulis $K \subset \bigcup N_\delta(x_i)$ ; $i = 1, 2, 3, \dots, s$.

Karena $E \subset K$, K kompak, dan barisan $\langle f_n \rangle$ terbatas titik demi titik pada K, akibatnya $\langle f_n \rangle$ juga terbatas titik demi titik pada E. Selanjutnya karena E himpunan terbilang maka E dapat disajikan dalam bentuk E = {$p_1$ , $p_2$ , $p_3$ , ... }. Dengan demikian $\langle f_n (p_1)\rangle$ adalah barisan bilangan terbatas pada R (himpunan bilangan nyata) atau di $R^2$ ( bidang Kartesius), jadi $\langle f_n (p_1)\rangle$ pasti memuat subbarisan yang konvergen, sebut barisan itu $\langle f_{1n} (p_1)\rangle$ ; n $\in$ N (himpunan bilangan asli). Demikian juga $\langle f_{1n} (p_2)\rangle$ adalah barisan terbatas, berarti $\langle f_{1n} (p_2)\rangle$ memuat subbarisan yang konvergen, sebut barisan itu dengan $\langle f_{2n} (p_2)\rangle$ , demikian seterusnya proses ini dikerjakan sehingga dapat disajikan dalam bentuk berikut.

$S$ : $f_1$ $f_2$ $f_2$ $f_3$ $f_4$ $f_5$ ...

$S_1$ : $\mathbf{f_{11}}$ $f_{12}$ $f_{13}$ $f_{14}$ $f_{15}$ $f_{16}$ … konvergen di $p_1$

$S_2$ : $f_{21}$ $\mathbf{f_{22}}$ $f_{23}$ $f_{24}$ $f_{25}$ $f_{26}$ … konvergen di $p_2$

$S_3$ : $f_{31}$ $f_{32}$ $\mathbf{f_{33}}$ $f_{34}$ $f_{35}$ $f_{36}$ … konvergen di $p_3$

$S_{n-1}$ : $f_{n-1\,1}$ $f_{n-1\,2}$ $f_{n-1\,3}$ $f_{n-1\,4}$ $f_{n-1\,5}$ $f_{n-1\,6}$ … konvergen di $p_{n-1}$

$S_n$ : $f_{n\,1}$ $f_{n\,2}$ $f_{n\,3}$ $f_{n\,4}$ $f_{n\,5}$ $f_{n\,6}$ … konvergen di $p_n$

Perhatikan bahwa barisan-barisan S, $S_1$ , $S_2$ , $S_3$ , ... , $S_{n-1}$ , $S_n$ di atas bersifat $S_1$ adalah subbarisan S, $S_2$ subbarisan dari $S_1$, $S_3$ subbarisan $S_2$ dan $S_n$ subbarisan $S_{n-1}$ untuk setiap n = 2, 3, 4, ... dengan $S_n$ konvergen di $p_n$. Sebut barisan $f_{11}$ , $f_{22}$ , $f_{33}$ , $f_{33}$ , … dengan Z, sehingga dapat ditulis, Z : $f_{11}$ , $f_{22}$ , $f_{33}$ , $f_{33}$ , … . Jelas Z adalah subbarisan dari S = $\langle f_n \rangle$, kecuali mungkin (n-1) suku pertama dari Z. Jadi suku-suku dari Z merupakan subbarisan dari $S_n$ , berarti $f_{n\,n}$ , $f_{n+1,n+1}$ , $f_{n+2,n+2}$ , $f_{n\,4\,3,n+3}$ , ... adalah subbarisan dari $S_n$ dengan demikian semuanya konvergen di $p_n$. Akibatnya Z juga konvergen di $p_n$ ; n = 1, 2, 3, .... Karena E = {$p_1$ , $p_2$ , $p_3$ , ... }, maka Z konvergen pada E. Jadi telah ditemukan Z subbarisan dari S = $\langle f_n \rangle$ yang konvergen di setiap titik anggota E.

Selanjutnya akan dibuktikan Z konvergen seragam pada K. Sebut Z = $\langle g_k\rangle$ ; k $\in$ N subbarisan dari $\langle f_n \rangle$. Karena $\langle f_n \rangle$ ekuikontinu pada K, maka barisan Z = $\langle g_k\rangle$ ekuikontinu pada K, berarti untuk setiap x,y $\in$ K, dengan d (x,y) < $\delta$ dan untuk setiap k $\in$ N berlaku,

$|g_k(x) - g_k(y)| < \varepsilon/3$ ..................................... (1)

Z = $\langle g_k\rangle$ konvergen di $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ , ... , $x_s$ $\in$ E, maka terdapat p $\in$ N sehingga untuk setiap k dan l yang lebih besar dari p (k $\geq$ p dan l $\geq$ p) berlaku,

$|g_k(x_i) - g_l(x_i)| < \varepsilon/3$ .................................. .(2)

Ambil sembarang x $\in$ K, maka terdapat m dengan $1 \leq m < s$, sedemikian hingga x $\in$ $N_\delta (x_m)$, akibatnya d (x , $x_m$) < $\delta$, sehingga berlaku

$|g_m(x) - g_m(x_m)| < \varepsilon/3$ ................................. (3)

Berdasarkan (1) , (2), dan (3) dan untuk setiap k $\geq$ p dan l $\geq$ p diperoleh,

$|g_k(x) - g_l(x)| = |g_k(x) - g_k(x_m) + g_k(x_m) - g_l(x_m) + g_l(x_m) - g_l(x)|$

$\leq |g_k(x) - g_k(x_m)| + g_k(x_m) - g_l(x_m)| + | g_l(x_m) - g_l(x)|$

$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$

Jadi dapat disimpulkan jika diberi $\varepsilon > 0$, tedapat p sehingga untuk setiap k $\geq$ p, l $\geq$ p, dan untuk setiap x $\in$ K berlaku $|g_k(x) - g_l(x)| < \varepsilon$. Ini menunjukkan barisan **Z = $\langle g_k\rangle$ konvergen seragam pada K**.

**Teorema 3 :**

Misalkan f(x,y) terdefinisi dan kontinu pada suatu domain bidang G. Maka sekurang-kurangnya terdapat satu kurva integral (kurva penyelesaian) dari persamaan diferensial dy/dx = f(x,y) lewat melalui setiap titik ($x_0$ , $y_0$) pada G.

Dengan kata lain teorema ini mengatakan, jika diberikan sebarang titik ($x_0$,$y_0$) dapat dibuat himpunan kompak G' $\subset$ G sedemikian hingga ($x_0$ ,

$y_0) \in G' \subset G$, maka terdapat paling sedikit satu kurva penyelesaian dari persamaan diferensial dy/dx = f(x,y) lewat melalui titik $(x_0 , y_0) \in G' \subset G$.

**Bukti :**

Diberikan sebarang himpunan kompak $G' \subset G$ dan sebarang titik $(x_0 , y_0) \in G'$, karena f kontinu pada G, maka f terbatas pada $G' \subset G$. Oleh karena itu terdapat bilangan K > 0, sehingga untuk setiap $(x , y) \in G'$ berlaku $|f(x,y)| \leq K$.

Pada bidang G lukis garis-garis dengan koefisien arah K dan –K yang keduanya melalui titik $(x_0 , y_0)$. Lukis garis-garis x = a dan x = b $(a < x_0 < b)$, sehingga dengan cara ini akan terlukis dua segitiga sama kaki yang salah satu titik sudutnya bersekutu di titik $(x_0 , y_0)$. Selanjutnya dikontruksi suatu keluarga garis-garis poligon disebut garis Euler (Rudin, 1976) yang bersesuaian dengan persamaan diferensial dy/dx = f(x,y) dengan cara sebagai berikut.

a. Lukis garis melalui titik $(x_0 , y_0)$ dengan kemiringan $f(x_0 , y_0)$. Pada garis ini ambil sembarang titik $(x_1,y_1)$ dengan $x_1 \in [a , b]$.

b. Lukis garis yang melalui titik $(x_1,y_1)$ dengan kemiringan $f(x_1,y_1)$. Pada garis ini ambil titik $(x_2,x_2)$, dengan $x_2 \in [a , b]$.

c. Demikian seterusnya proses ini dilanjutkan sampai tak berhingga kali.

Selanjutnya dikontruksi suatu barisan yang terdiri dari garis-garis Euler tersebut yang melalui titik $(x_0 , y_0)$. Sebut barisan ini dengan $\langle Q_n \rangle$, jelas untuk setiap n, $Q_n$ pasti berada di dalam daerah segitiga yang terbentuk, karena kemiringan masing-masing segmen garis pembangun $Q_n$ tidak akan melebihi K dan tidak akan kurang dari –K.

Dari keluarga garis-garis Euler yang terbentuk di atas, dibuat barisan garis-garis Euler dengan sifat ”ukuran terpanjang” dari segmen garis yang membangun $Q_n$ mendekati nol (0), apabila n mendekati tak berhingga ($n \to \infty$ ). Dengan prinsip di atas misalkan $\varphi_n$ adalah suatu fungsi dengan grafik $Q_n$. Ini berarti $\langle Q_n \rangle$ terdefinisi pada [a , b]. Karena persamaan garis yang melalui $(x_0 , y_0)$ dengan kemiringan K adalah $y = K(x - x_o) + y_o$, dengan mengambil M = maksimum $\{|K(a - x_o) + y_o| , K(b - x_o) + y_o|\}$, maka untuk setiap $x \in [a , b]$ dan untuk setiap $n \in N$ berlaku, $|\varphi_n| \leq M$. Ini menunjukkan $\langle \varphi_n \rangle$ terbatas seragam pada [a , b], akibatnya $\langle \varphi_n \rangle$ juga terbatas titik demi titik pada [a , b].

Selanjutnya akan ditunjukkan $\langle \varphi_n \rangle$ ekuikontinu pada [a , b] dengan cara sebagai berikut. Ambil sembarang $\varphi \in \langle \varphi_n \rangle$ dan $x', x'' \in [a , b]$, dengan $d(x', x'') < \delta$, untuk $x < x' < x''$ atau $x'' < x' < x$, berarti $\varphi(x')$ dan $\varphi(x'')$ bernilai paling besar atau terletak paling jauh pada daerah segitiga yang sebangun di atas sebab kemiringannya $\leq K$. Karena $d(x', x'') < \delta$, maka dapat ditulis (i). $|x'' - x'|K < \varepsilon$ atau $|x'' - x'| < \varepsilon/K$. (ii). $x' < x_o < x''$ dengan $|x'' - x'| < \delta$, akibatnya $|x'' - x_o| < \delta$ dan $|x_o - x'| < \delta$. Berdasakan (i) dan (ii) diperoleh ktidaksamaan berikut, $|\varphi(x'') - \varphi(x')| \leq |\varphi(x'') - \varphi(x_o)| + |\varphi(x_o) - \varphi(x')| < \varepsilon/2K + \varepsilon/2K = 2\varepsilon/2K = \varepsilon/K < \varepsilon$. Jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$ dapat diambil $\delta = \varepsilon/2K$, sedemikian hingga untuk semua $x,y \in [a , b]$, dengan $d(x', x'') < \delta$, berlaku , $|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| < \varepsilon$, untuk semua $n \in N$ (himpunan bilangan asli)). Ini menunjukkan barisan fungsi $\langle \varphi_n \rangle$ ekuikontinu pada [a , b].

Karena barisan fungsi $\langle \varphi_n \rangle$ terbatas titik demi titik dan ekuikontinu pada [a , b], maka menurut teorema Arzela-Ascoli, barisan $\langle \varphi_n \rangle$ passti memuat subbarisan katakan $\langle \varphi^{(n)} \rangle$ yang konvwergen seragam ke suatu fungsi katakan $\varphi(x)$ pada [a , b]. Misalkan $\varphi(x) = \lim \langle \varphi^{(n)} \rangle$ untuk n mendekati tak berhingga, ini berarti $y = \varphi(x)$ melalui titik $(x_o,y_o) \in G' \subset G$.

Selanjutnya akan ditunjukkan kurva y = φ (x) memenuhi persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ pada interval (a,b), artinya harus ditunjukkan $\forall \varepsilon > 0$ dan sembarang titik x', x'' ∈ (a , b) dan |x'' – x'| cukup kecil maka berlaku,

$$\left| \frac{\varphi(x'')-\varphi(x')}{x''-x'} - f(x',(x')) \right| < \varepsilon,. \quad ........ \quad (1)$$

untuk n yang cukup besar dan |x'' – x'| cukup kecil pernyataan (1) ekuivalen dengan ,

$$\left| \frac{\varphi^{9n)}(x'')-\varphi^{(n)}(x')}{x''-x'} - f(x',(x')) \right| < \varepsilon, \quad .... \quad (2)$$

Sebelum membuktikan kurva y = φ (x) memenuhi persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ pada interval (a,b), terlebih dahuli akan dibuktikan keekuivalenan persamaan (1) dan (2).

Bukti :

a. (1) ⇒ (2)

Misalkan $\lim_{n\to\infty} \varphi^{9n)}(x) = \varphi(x)$, maka $\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^{(x)}(x'')-\varphi^{(n)}(x')}{x''-x'} = \frac{\varphi(x'')-\varphi(x')}{x''-x'}$, ini berarti

tuk sembarang ε > 0 terdapat p ∈ N, sehingga untuk semua n ≥ P berlaku,

$$\left| \frac{\varphi^{(x)}(x'')-\varphi^{(n)}(x')}{x''-x'} - \frac{\varphi(x'')-\varphi(x')}{x''-x'} \right| < \varepsilon$$

. ................................. ......... (3)

untuk menyederhanakan, sebut

$$A = \frac{\varphi(x'')-\varphi(x')}{x''-x'}, \quad B = \frac{\varphi^{(x)}(x'')-\varphi^{(n)}(x')}{x''-x'}$$

, dan C = f(x' , (x'))

............................ (4)

Berdasarkan (4), persamaan (3) dapat ditulis, |B - C| ≤ |A - B| + |A - C| ≤ ε + ε = 2ε, ini membuktikan (1) ⇒ (2)

b. (2) ⇒ (1)

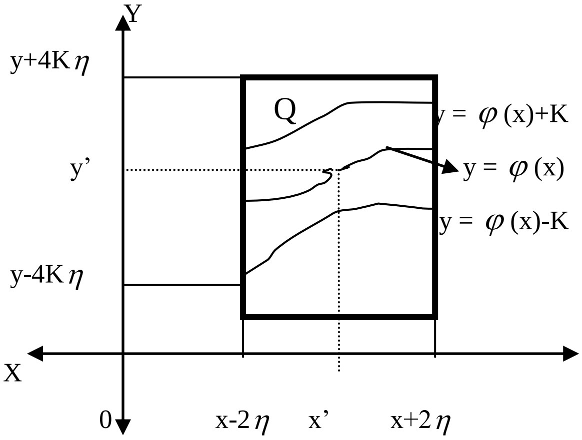
Telah diketahui bahwa |B - A| ≤ ε ; | B - C | ≤ ε , bedasarkan dua pernyataan ini dapat ditulis |A - C| ≤ |A - B| + |B - C| ≤ ε + ε = 2ε, ini membuktikan (2) ⇒ (1).

Berdasarkan (a) dan (b) disimpulkan persamaan (1) ekuivalen dengan persamaan (2).

Selanjutnya misalkan y' = $\varphi$(x'), karena fungsi f kontinu maka untuk setiap ε > 0 terdapat $\eta$ > 0, sedemikian hingga |f(x,y) – f(x',y')| < ε atau f(x',y') - ε < f(x,y) < f(x',y') + ε, asalkan |x – x'| < 2$\eta$ dan |y – y'| < 4K$\eta$. ........................................................................ (5)

Perhatikan bahwa himpunan titik-titik (x,y) yang memenhi pertidaksamaan (5) adalah suatu persegi panjang, sebut persegi panjang itu dengan Q.

Misalkan N cukup besar, sehingga untuk semua n > N, panjang maksimum segmen garis yang membangun $L_n$ < $\eta$ dan $|\varphi(x) - \varphi^{(n)}(x)|$ < K$\eta$. Ini berati semua garis-garis Euler $L_n$ dengan n > N akan terletak dalam persegi panjang Q, sebab $L_n$ < $\eta$ untuk setiap n> N, dengan 0 < $\eta$ < 2$\eta$, seperti yang diilustrasikan dalam gambar berikut.



Andaikan titik $(a_0,b_0)$ , $(a_1,b_1)$ , $(a_2,b_2)$ , …., $(a_{k+1}$ , $b_{k+1})$, adalah titik-titik puncak segemen-segmen garis pembangun $L_n$, dengan $a_0 \le x' < a_1 < a_2 < .... < a_k < x'' \le a_{k+1}$, maka dapat ditulis,

$$\varphi^{(n)}(a_1) - \varphi^{(n)}(x') = (a_1 - x')\, f(a_0 , b_0)$$

$$\varphi^{(n)}(a_2) - \varphi^{(n)}(a_1) = (a_2 - a_1)\, f(a_1 , b_1)$$

$$.......................................... \quad (6)$$

$$\varphi^{(n)}(a_{I+1}) - \varphi^{(n)}(a_i) = (a_{i=1} - a_i)\, f(a_i , b_i)$$

$$\varphi^{(n)}(x'') - \varphi^{(n)}(a_k) = (x'' - a_k)\, f(a_k , b_k)$$

dengan i = 1,2, ..., (k-1). Dari (5) dan (6) dan jika $|x'' - x'| < \eta$ akan diperoleh,

$$[f(x',y')-\varepsilon](a_1-x') < \varphi^{(n)}(a_1) - \varphi^{(n)}(x') < [f(x',y')+\varepsilon](a_1-x')$$

$$[f(x',y')-\varepsilon](a_2-a_1) < \varphi^{(n)}(a_2) - \varphi^{(n)}(a_1) < [f(x',y')+\varepsilon](a_2-a_1)$$

$$[f(x',y')-\varepsilon](a_3-a_2) < \varphi^{(n)}(a_3) - \varphi^{(n)}(a_2) < [f(x',y')+\varepsilon](a_3-a_2)$$

$$[f(x',y')-\varepsilon](a_{i+1}-a_i) < \varphi^{(n)}(a_{1+1}) - \varphi^{(n)}(a_i) < [f(x',y')+\varepsilon](a_{1+1}-a_i)$$

$$[f(x',y')-\varepsilon](x''-a_k) < \varphi^{(n)}(x'') - \varphi^{(n)}(a_k) < [f(x',y')+\varepsilon](x''-a_k)$$

Jika seluruh pertidaksamaan ini dijumlahkan, dan $|x'' - x'| < \eta$ maka akan diperoleh,

$$[f(x',y')-\varepsilon](x''-x') < \varphi^{(n)}(x'') - \varphi^{(n)}(x') < [f(x',y')+\varepsilon](x''-x'). \text{..............................} \quad (7)$$

krena $y' = \varphi(x')$, maka bentuk persamaan (7) dapat ditulis menjadi,

$$f(x',y') - \varepsilon < \frac{\varphi^{(x)}(x'') - \varphi^{(n)}(x')}{x''-x'} < f(x',y') + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad f(x' , (x')) - \varepsilon < \frac{\varphi^{(x)}(x'') - \varphi^{(n)}(x')}{x''-x'} < f(x' , (x')) + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \frac{\varphi^{(x)}(x'') - \varphi^{(n)}(x')}{x''-x'} - f(x' , (x')) \right| < \varepsilon \text{.................................................} \quad (8)$$

Jelas terlihat bahwa bentuk pertidaksamaan (8) ekuivalen dengan bentuk pertidaksamaan (2). Dengan demikian terbukti bahwa $y = \varphi(x)$ merupakan penyelesaian persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y).$$

## IV. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas secara umum dapat disimpulkan bahwa,

1.Teorema **Azela-Ascoli** dapat dijadikan dasar untuk memahami **teorema eksistensi** tentang penyelesaian suatu persamaan diferensial.

2. Dengan teorema **Arzela-Ascoli** dan teorema **Peano** dapat dipahami tentang **eksistensi penyelesaian** suatu persamaan diferensial.

## Daftar Pustaka


Apostol, L., 1974, Mathematical Analysis. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts

Goldberg, R., 1976, Methods of Real Analysis, John Wiley & Sons, New York

Royden, H.L., 1989, Real Analysis, Macmillan Publishing Company, New York

Rudin, W., 1976, Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill International Book Company, Ltd, Singapore

Simmon, G.F., 1963, Introduction to Topology and Modern Analysis, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd, Tokyo

Soemantri, R., 1988, Analisis Real I, Penerbit Karunika Jakarta, Universitas terbuka, Jakarta