RESIDU PADA FUNGSI BETA

(*Residues on Beta Function*)

Yulia Mustika Anggraini[1], Gugun M. Simatupang[2], Cut Multahadah[3]
[1,3]Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Jambi
[2]Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jambi.Jl. Jambi - Ma. Bulian, KM. 15, Mendalo Darat Jambi 36361
[1]Email : yuliamustikaanggraini@gmail.com, [3]cutmultahadah@gmail.com

ABSTRAK

Fungsi Beta merupakan bagian dari suatu fungsi khusus dalam bentuk pernyataan integral dan bentuk hasil dua kali perkalian fungsi faktorial. Fungsi Beta bagian dari integral tak wajar dikarenakan memiliki parameter yang bernilai tak hingga sehingga mengakibatkan fungsi yang tak terbatas. Fungsi Beta disimbolkan sebagai β yang pada dasarnya dapat didefinisikan pada bilangan riil dan kompleks dengan beberapa syarat tertentu. Penyelesaian fungsi Beta dapat menggunakan residu. Residu merupakan hasil sisa dari suatu persamaan yang memiliki titik singular. Residu digunakan dalam menghitung integrasi fungsi kompleks pada integral tak wajar. Maka residu dapat menyelesaikan fungsi Beta. Residu pada fungsi Beta menggunakan analisa konsep residu dengan cara menentukan daerah kekonvergenan, keanalitikan, dan kesingularitas pada fungsi Beta maka didapatkan suatu domain fungsi Beta. Daerah domain tersebut dapat digunakan dalam mengekspansi deret Laurent. Maka akan didapatkan suatu *pole* atau kutub yang akan memengaruhi perhitungan dalam memperoleh residu.Berdasarkan hasil penelitian, fungsi Beta mempunyai titik singular yang menyebabkan titik tersebut tidak analitik terhadap fungsi Beta. Titik singular terjadi pada titik $z_0 = -1$,maka bentuk residu pada fungsi Beta dengan $pole$kutubtingkat$-n$dan titik singular $z_0 = -1$ membentuk persamaan:

$$\beta(m,n) = \int_0^\infty \frac{z^{m-1}}{(1+z)^{m+n}} dz = \pi i.(\frac{1}{((m+n)-1)!} \lim_{z\to -1} \frac{d^{(m+n)-1}}{dz^{(m+n)-1}} [z^{(m-1)}])$$

dengan $m,n \in Z^+$.
dan nilai parameter (m,n) memuat bilangan bulat positif tak-hingga, maka untuk setiap nilai bilangan bulat positif yang dimasukkan pada fungsi Beta menghasilkan residu bernilai nol.

Kata kunci : Fungsi Beta, Residu

ABSTRACT

The Beta function is part of a special function in the form of an integral statement and the result form is twice the multiplication of factorial functions. The Beta function is part of an unnatural integral because it has infinite-value parameters, resulting in infinite functions. Beta function is symbolized as β which basically can be defined in real and complex numbers with certain conditions. Completion of Beta functions can use residues. Residue is the residual product of an equation that has a singular point. Residues are used in calculating the integration of complex functions on unnatural integrals. Then the residue can complete the Beta function. Residues in the Beta function use the analysis of the concept of residues by determining the convergence, analytical, and kesingularitas areas of the Beta function, a Beta function domain is obtained. The domain area can be used in expanding the Laurent series. Then you will get a pole or pole that will affect the calculation in obtaining residuals. Based on the results of the study, the Beta function has a singular point that causes the point is not analytic to the Beta function. The singular point occurs at the point $z_0 = -1$, then the residual form in the Beta function with the n-level pole and the singular point $z_0 = -1$ forms the equation,

$$\beta(m,n) = \int_0^\infty \frac{z^{m-1}}{(1+z)^{m+n}} dz = \pi i.(\frac{1}{((m+n)-1)!} \lim_{z\to-1} \frac{d^{(m+n)-1}}{dz^{(m+n)-1}} [z^{(m-1)}])$$

with $m, n \in Z^+$.
and the parameter value (m, n) contains infinite positive integers, then for each positive integer value entered in the Beta function produces a zero value residue.

Keywords: Beta function, Residue

I. PENDAHULUAN

Kalkulus adalah bidang ilmu matematika yang didalamnya terdapat materi yang mencakup limit, deret, diferensial, integral, fungsi-fungsi dan konsep-konsep yang berkaitan serta penerapannya [3]. Kalkulus diterapkan dalam memecahkan suatu persamaan dan memecahkan berbagai masalah yang tidak dapat dipecahkan dengan aljabar elementer. Pada kalkulus terdapat kalkulus dasar dan kalkulus lanjut. Kalkulus tingkat lanjutdikenal dengan fungsi khusus yang biasanya digunakan dalam menyelesaikan permasalahan di bidang fisika dan teknik. Salah satunya fungsi Beta. Fungsi Beta merupakan fungsi dalam bentuk penyataan integral. Fungsi Beta bagian dari integral tak wajar dikarenakan memiliki parameter yang bernilai tak hingga sehingga mengakibatkan fungsi yang tak terbatas. Fungsi Beta disimbolkan sebagai β yang pada dasarnya dapat didefinisikan pada bilangan riil dan kompleks dengan beberapa syarat tertentu.

Perkembangan konsep matematika, integral tak wajar dapat diselesaikan menggunakan residu. Residu dalam bidang kompleks didefinisikan di suatu titik singular terasing sebagai nilai koefisien suku $(z - z_0)$ dalam ekspansi deret *Laurent*, maka fungsi Beta dapat pula diselesaikan menggunakan residu dengan beberapa metode dalam penyelesaiannya. Residu pada fungsi Beta dengan menggunakan analisa konsep residu dengan cara menentukan daerah kekonvergenan, keanalitikan, dan kesingularitas pada fungsi Beta. Sehingga didapatkan suatu domain fungsi Beta. Daerah domain tersebut dapat digunakan dalam mengekspansi deret *Laurent*, maka akan didapatkan suatu pole atau kutub yang akan memengaruhi perhitungan dalam memperoleh residu. Tujuan dari penelitian ini adalah mengaplikasikan konsep residu pada fungsi Beta.

II. METODE

Penelitian ini penulis menggunakan studi literatur. Studi literatur diperoleh dari dalam buku-buku, jurnal maupun skripsi mengenai konsep residu dan fungsi Beta. Selanjutnya mengumpulkan studi literatur yang berhubungan objek penelitian dan dilanjutkan dengan mempelajari, mengutip dan menyandurkan teorema-teorema yang berhubungan dengan objek penelitian, Sehingga timbul keterkaitan antara teorema-teorema dalam penyelesaian objek penelitian.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Konsep Residu

Residu merupakan bagian dari fungsi bilangan kompleks yang digunakan dalam penyelesaian integral tertentu. Residu adalah nilai koefisien dari $(z-z_0)^{-1}$ pada deret *Laurent* fungsi f disekitar titik singular terasing z_0. Residu didefinisikan sebagai koefisien dari ekspansi deret Laurent pada fungsi $f(z)$ di titik $z=z_0$[7]. Adapun teorema residu bagian dari residu ketika memiliki titik singular lebih dari satu pada suatu fungsi atau persamaan. Menurut [7] teorema residu digunakan untuk saran menghitung integrasi fungsi kompleks pada integral tak terhingga (integral tak wajar) dan juga integral terhingga. Selain itu, dapat pula diterapkan pada fungsi faktorial dan angka bernaoulli. Residu terjadi pada suatu fungsi atau persamaan yang mempunyai titik singular sehingga mengakibatkan pada titik tersebut fungsi tidak analitik dan mempunyai titik *pole* (kutub). Oleh karena itu, digunakanlah titik singular sebagai perhitungan integral dengan melibatkan residu.

Fungsi Beta merupakan hasil kali dua dari fungsi faktorial sebagai perkalian dari dua fungsi integral [8]. Fungsi Beta merupakan salah satu contoh dari integral tak wajar. Pada parameter $\beta(m,n)$fungsi Beta akan memuat bilangan bulat positif sampai tak hingga, sehingga membuat fungsi Beta menjadi tak terbatas.

Menurut [12] fungsi Beta sebagai bentuk integral yang melibatkan parameter m dan n dengan bentuk

$$\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

untuk menentukan nilai parameter pada fungsi Beta $\beta(m,n)$ digunakan induksi matematika.

Untuk menerapkan konsep residu pada fungsi Beta ditentukan kekonvergenan, keanalitikan dan singularitas fungsi beta.

1. Kekonvergenan fungsi beta

Kekonvergenan dapat dicari jika fungsi Beta limitnya ada. Pada fungsi Beta memiliki parameter (m,n) yang merupakan suatu bilangan bulat positif, sehingga adanya dua kondisi pada parameter yaitu,

Kondisi:

1) $m=n$

2) $m\neq n$

Padakekonverganainidapatdilakukandenganmenggunakandefinisiintergral tak wajar pada selang hingga ketika fungsi $f(x)$ kontinu pada [0,1) dan tidak kontinu di 1, sehingga diperoleh:

$$m,n\in Z^+$$

$$\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

$$=\lim_{t\to 1^-}\int_0^t x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \qquad (1)$$

Pada persamaan diatas, pada parameter (m,n) mempunyai dua kondisi. Maka fungsi Beta mempunyai limit dan konvergen jika $m>0, n>0$. Pada $m<0, n<0$ mengakibatkan fungsi Beta tidak terdefinisi dan tidak mempunyai limit.

2. Keanalitikan Fungsi Beta

Suatu fungsi dikatakan analitik jika fungsi $f(z)$ mempunyai turunannya di semua titik pada suatu lingkungan z_0. Hal ini ditegaskan pada definisi fungsi analitik oleh Palioras [10]. Menurut [7], pada integral tak wajar dapat dihitung fungsi $f(x)$ menjadi fungsi

$f(z)$dikarenakan keadaan khusus $f(x)$ dari $f(z)$ ketika $y = 0$ dalam $z = x + iy$, sehingga mengakibatkan fungsi $f(x)$ bagian khusus dari $f(z)$. Maka fungsi Beta menjadi,

$$\beta(m,n) = \int_0^1 z^{m-1}(1-z)^{n-1}\, dz\ , m > 0, n > 0 \qquad (2)$$

Menentukan keanalitikan suatu fungsi dapat juga dilakukan dengan menggunakan Persamaan *Cauchy-Riemann* pada fungsi Beta. Berdasarkan teorema pada persamaan *Cauchy-Riemann*maka fungsi Beta dapat diselesaikan sebagai berikut.

$$f(z) = z^{m-1}(1-z)^{n-1}$$

$m, n \in Z^+$
Ambil $z = x + iy$
Maka diperoleh,

$$f(x+iy) = (x+iy)^{m-1}(1-(x+iy))^{n-1}$$

Berdasarkan persamaan *Cauchy-Riemann*,

$$u_x = v_y \text{ dan } v_x = -u_y$$

Maka, dengan memberikan nilai parameter $m > 0, n > 0$ akan membentuk fungsi Beta menjadi analitik. Dua kondisi pada parameter akan membentuk fungsi Beta menjadi analitik, sehingga fungsi $f(z)$ mempunyai turunan di semua titik sekitaran lingkungan z_0, sehingga fungsi Beta mempunyai keanalitikan di sekitaran titik-titik di lingkungan z_0.

3. Singularitas Fungsi Beta

Pada kesingularitas akan dicari ketika $f(z)$ tidak analitik di titik z_0. Artinya pada titik tersebut fungsi $f(z)$ tidak mempunyai turunannya, namun hanya lingkungan sekitar $f(z)$ yang membuat $f(z)$analitik. Maka dalam menentukan titik singular dapat diselesaikan dengan mencari suatu nilai atau titik yang menyebabkan fungsi Beta tidak analitik.Berdasarkan sifat fungsi Beta suatu $\beta(m,n)$ dapat menjadi suatu persamaan

$$\beta(m,n) = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{(m+n)}}\, dx \qquad (3)$$

dengan $m, n \in Z^+$
diubah dalam bentuk bilangan kompleks ketika $y = 0$, persamaan menjadi

$$\beta(m,n) = \int_0^\infty \frac{z^{m-1}}{(1+z)^{(m+n)}}\, dz \qquad (4)$$

dengan $m, n \in Z^+$

Berdasarkan persamaan (4) diatas, maka terdapat titik singular terasing ketika $(1+z) = 0$, sehingga titik $z_0 = -1$ merupakan titik singular terasing. Titik singular terasing bila ada lingkungan dari z_0 yang mengakibatkan $f(z)$ analitik pada lingkungan tersebut kecuali di titik $z_0$itu sendiri atau dapat dikatakan ada bilangan positif riil R sehingga $f(x)$ analitik pada daerah berbentuk $0 < |1+z| < R$[10]. Pada titik $z_0 = -1$ mengakibatkan $f(z)$ tidak analitik dikarenakan tidak mempunyai turunannya dan $f(z)$ tidak terdefinisi. Oleh karena itu, f(z) analitik disekitaran titik z_0 kecuali $z_0 = -1$.

Pada persamaan fungsi Beta memiliki parameter $m, n > 0$, maka akan membentuk suatu pangkat lebih dari satu sehingga membentuk kutub bertingkat atau kutub $n = 2,3,4, \dots, n$.

Residu Pada Fungsi Beta

Berdasarkan konsep residu yang telah didapatkan pada kekonvergenan, keanalitikan dan singularitas, maka dilanjutkan dengan menghitung residu pada fungsi Beta. Titik singular pada fungsi Beta adalah $z_0 = -1$ dan memiliki kutub bertingkat atau kutub tingkat$n$.Mencari hasi integral pada fungsi Beta, gunakan penyelesaian residu dengan persamaan,

$$\int_c f(z)dz = 2\pi i Res[f, z_0] \qquad (5)$$

Selanjutnya berdasarkan teorema Kutub tingkat$n$ maka dalam menghitung residu digunakan persamaan sebagai beikut.

$$Res[f, z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_0)^n f(z)]$$

Kutub tingkat$n$ merupakan hasil dari penjumlahan parameter fungsi Beta $(m+n)$ hal ini terlihat persamaan (4) sehingga akan mempengaruhi besar kutub pada fungsi Beta, makadiperoleh

$$\int_c f(z)dz = 2\pi i Res[f, -1]$$

$$= 2\pi i.(\frac{1}{((m+n)-1)!} \lim_{z \to -1} \frac{d^{(m+n)-1}}{dz^{(m+n)-1}} [z^{(m-1)}]) \qquad (6)$$

Pada persamaan (6) merupakan bentuk perhitungan residu pada fungsi Beta. Fungsi tersebut terdapat dua kali π yang artinya daerah residu pada lingkaran penuh sedangkan pada fungsi beta dibatasi pada daerah setengah lingkaran.Makaresidupadafungsi Beta diperoleh,

$$\beta(m,n) = \int_0^\infty \frac{z^{m-1}}{(1+z)^{m+n}} dz = \pi i.(\frac{1}{((m+n)-1)!} \lim_{z \to -1} \frac{d^{(m+n)-1}}{dz^{(m+n)-1}} [z^{(m-1)}])$$

dengan $m, n \in Z^+$.

Persamaan diatas, jika dimasukkan nilai parameter berupa bilangan bulat positif, maka untuk setiap nilai yang dihasilkan residu pada fungsi Beta adalah nol.

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang didapatkan, maka diperoleh bahwa teorema residu yang digunakan pada fungsi Beta adalah residu dengan kutub tingkat$n$ dan titik singular $z_0 = -1$dengan persamaan,

$$\beta(m,n) = \int_0^\infty \frac{z^{m-1}}{(1+z)^{m+n}} dz = \pi i.(\frac{1}{((m+n)-1)!} \lim_{z \to -1} \frac{d^{(m+n)-1}}{dz^{(m+n)-1}} [z^{(m-1)}])$$

dengan $m, n \in Z^+$.

Parameter Fungsi Beta memuat bilangan bulat positif sampai tak-hingga, maka untuk setiap bilangan bulat positif yang dimasukkan padafungsi Beta akan menghasilkan residu bernilai nol.

V. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada dosen pembimbing yang telah memberi waktu dan ilmu kepada penulis sehingga bisa menyelesaikan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Arfken, George. 1995. *Mathematical Methods for Physicists*. 3rd Ed. New York: Academic Press, Inc.

[2] Arfken, G.B. dan Hans J.W. 2005. *Mathematical Methods for Physicists.* Elseiver Academic Press, United Stated of America.

[3] Djati kerami,dkk. 2003. Kamus Matematika. Balai Pustaka. Jakarta.

[4] Edwar, C.H & Penney, David E,.1993 *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*.3rd Edition. Prentice-Hall International.

[5] Herdiana, Heris, Sukasno dan Kusman E. 2002. *Persamaan Differensial*.Bandung: Pustaka Setia.

[6] Hutahean, E. 1993. *Matematika Teknik Lanjutan*. Jakarta: Erlangga.

[7] Jati, Bambang Eka Murdaka. 2011. *Matematika Lanjut untuk Fisika dan Teknik.* Yogyakarta: CV. ANDI OFFSET.

[8] Megawati. 2010. *Fungsi Gamma dan Fungsi Beta Pada Bilangan Kompleks*. Skripsi. Fakultas Matematika dn Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Lambung Mangkurat. Banjarbaru.

[9] Nagle, R.E, Sa, E.B. 1996. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. Addison-Wesley Publishing Company. New York.

[10] Palioras, John.D . 1987. *Complex Variables For Scientists And Engineers*. Drs. Wibisono Gunawan, Ed. Surabaya: Erlangga.

[11] Pinsky, M.A. 1998. *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Applications*. Third Edition. Singapore: McGraw-Hill Inc.

[12] Ross, L.S. 2004. *Differential Equations Third Eddition*.Wiley. India.

[13] Setiawn, Restu P., Dr. Hartono. 2017. Analisis *Kekonvergenan Pada Barisan Fungsi*. Jurnal Matemaika. Vol 6. No.1. Program Studi Matematika. Jurusan Pendidikan Matematika. Universitas Negeri Yogyakarta.

[14] Spiegel, M.R. 1990. *Advance Calculus*. McGraw-Hill. New York.

[15] Strauss, W.A. 1992. *Partial Differential Equations an Introduction*. New York: John Wiley & SonsInc.

[16] Warsito. 2007. Perhitungan Integral Fungsi Real Menggunakan Teknik Residu. Jurnal Matemtika, Volume 8. No.1. Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Terbuka.

[17] Zulaihah, Siti. 2015. *Residu Pada Fungsi Gamma*. Skripsi. Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Negeri Islam (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. Malang.