MODEL *SIRS* PADA PENYEBARAN PENYAKIT DIARE AKUT PADA BALITA DI PROVINSI JAMBI

Zulistia Nabila[1], Kamid[2], Niken Rarasati[3]
[1,2,3]Program Studi Matematika Universitas Jambi
[1]zulistianabila.zn@gmail.com

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan model matematika *SIRS* pada penyebaran penyakit diare akut balita, mengetahui titik kesetimbangan model dan menguji kestabilan titik tersebut. *D*iasumsikan laju kelahiran dan kematian alami dianggap sama, populasi penduduk bersifat homogen, terdapat satu populasi yaitu balita, hanya terdapat penyakit diare dalam populasi, dan individu yang terinfeksi dapat sembuh dari penyakit akan menjadi rentan kembali serta tidak terdapat imunisasi rotela pada balita. Berdasarkan titik kesetimbangan bebas penyakit yang diperoleh, selanjutnya diuji kriteria kestabilan disekitar titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik yang dilihat dari bilangan reproduksi dasarnya. Titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik jika bilangan reproduksi dasarnya kurang dari satu dan tidak stabil jika bilangan reproduksi dasarnya lebih dari satu. Sedangkan titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik jika bilangan reproduksi dasarnya lebih dari satu. Diperoleh hasil titik kesetimbangan bebas penyakit sebesar$(S,I,R) = (\ 398.177,0,0)$. Sedangkan untuk titik kesetimbangan endemik penyakit sebesar $(S,I,R) = (469, 15.036, 382.671)$.Bilangan reproduksi dasar untuk titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu sebesar: $R_0 = \left(\rho\pi\left(-\mu - \frac{\alpha}{\mu}\right) + \mu(3\mu + 2\alpha + 2c) + \alpha c\right) + \left(\frac{(\rho\pi(-\mu-\alpha)+\mu(\mu^2+\mu c+\mu\alpha+\alpha c)}{-\rho\pi+3\mu+c+\alpha}\right)$ atau $R_0 = -605$. Bilangan reproduksi dasar untuk titik kesetimbangan endemik penyakit yaitu sebesar: $R_0 = (\mu(+\alpha) + \rho I^*(2\mu + \alpha + c) - (\frac{\mu\rho I^*(\mu+\alpha+c)}{2\mu+\alpha+\rho i^*})$ atau $R_0 = 610$. Artinya titik kesetimbangan bebas penyakit memiliki $R_0 < 1$ maka sistem stabil asimtotik lokal berarti pada populasi balita di Provinsi Jambi tidak ada yang terinfeksi dan tidak ada yang dapat menularkan penyakit diare akut dan titik kesetimbangan endemik penyakit memiliki $R_0 > 1$ maka sistem stabil asimtotik lokal berarti setiap individu terinfeksi dapat menularkan penyakit diare akut kepada rata-rata dari satu individu rentan sehingga dalam jangka waktu tertentu penyakit menyebar dalam populasi.

Kata kunci: Kestabilan, model *SIRS,* Titik Kesetimbangan

ABSTRACT

This study aims to obtain a SIRS mathematical model on the spread of acute diarrheal disease in infants, find out the equilibrium point of the model and test the stability of these points. It is assumed that the birth rate and natural death rate are considered the same, the population is homogeneous, there is one population that is toddlers, there is only diarrheal disease in the population, and infected individuals can recover from the disease will become vulnerable again and there is no rotela immunization in infants. Based on the obtained disease-free equilibrium point, the stability criteria are tested around the disease-free and endemic equilibrium point as seen from its basic reproductive number. The disease-free equilibrium point is asymptotic stable if the basic reproductive number is less than one and unstable if the basic reproduction number is more than one. Whereas the endemic equilibrium point is stable asymptotically if the reproduction number has more than one base. The results obtained from the disease free equilibrium point are $(S, I, R) = (\ 398.177,0,0)$.. As for the endemic equilibrium point of the disease $(S, I, R) = (469, 15.036, 382.671)$. Basic reproduction numbers for disease-free equilibrium points are:$R_0 = \left(\rho\pi\left(-\mu - \frac{\alpha}{\mu}\right) + \mu(3\mu + 2\alpha + 2c) + \alpha c\right) + \left(\frac{(\rho\pi(-\mu-\alpha)+\mu(\mu^2+\mu c+\mu\alpha+\alpha c)}{-\rho\pi+3\mu+c+\alpha}\right)$ and $R_0 = -605$.The basic reproduction number for the endemic equilibrium point of the disease is equal to: $R_0 = (\mu(+\alpha) + \rho I^*(2\mu + \alpha + c) - (\frac{\mu\rho I^*(\mu+\alpha+c)}{2\mu+\alpha+\rho i^*})$ or $R_0 = -605$. This means that the disease-free equilibrium point has $R_0 < 1$ then the system is stable Local asymptotic means that in the under five population in Jambi Province no one is infected and no one can transmit acute diarrheal disease and the endemic equilibrium point of the disease has $R_0 > 1$ so the local asymptotic stable system means that every infected individual can transmit acute diarrheal disease to an average of one individual is vulnerable so that within a certain period of time the disease spreads in the population.

Keywords: Equilibrium Point, Stability, SIRS Model

I. PENDAHULUAN

Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang berusaha untuk menjelaskan dan mempresentasikan sistem-sistem fisik atau problem pada dunia real pada pernyataan matematika, sehingga diperoleh pemahaman dari masalah dunia nyata ini menjadi lebih tepat. Representasi matematika yang dihasilkan dari proses ini dikenal dengan model matematika [4]. Model matematika adalah hasil perumusan yang menggambarkan masalah dalam dunia nyata yang kemudian dicari solusi. Model matematika tersebut akan terbentuk suatu persamaan diferensial yang dapat diketahui titik kesetimbangannya dan dianalisis kestabilan di titik kesetimbangan. Model matematika yang digunakan untuk melihat tingkat penyebaran suatu penyakit menular disebut dengan model epidemi. Salah satu model matematika epidemi adalah model epidemi SIRS (*Susceptibel-Infected-Recovered-Susceptibel).*

Diare merupakan kondisi buang air besar encer yang terjadi lebih sering dari biasanya. Diare dapat menyebabkan hilangnya sejumlah besar air dan garam dari tubuh. Diare terjadi ketika makanan dan cairan yang anda telan bergerak secara cepat atau terlalu besar jumlahnya. Biasanya usus menyerap cairan yang dimakan dan meninggalkan kotoran setengah padat. Tetapi cairan dari makanan yang dimakan tidak diserap, hasilnya adalah buang air besar encer[3]. Berdasarkan data pada Badan Pusat Statistik Provinsi Jambi Diare termasuk dalam jumlah kasus sepuluh penyakit terbanyak di Provinsi Jambi.

Tujuan dari penelitian adalah: 1. Bagaimana model penyebaran penyakit diare akut pada balita di Provinsi Jambi. 2. Bagaimana cara menentukan titik kesetimbangan penyakit diare akut pada balita di Provinsi Jambi. 3. Bagaimana cara mengetahui kestabilantitik kesetimbanganpenyakit diare akut pada balita di Provinsi Jambi.

II. METODE

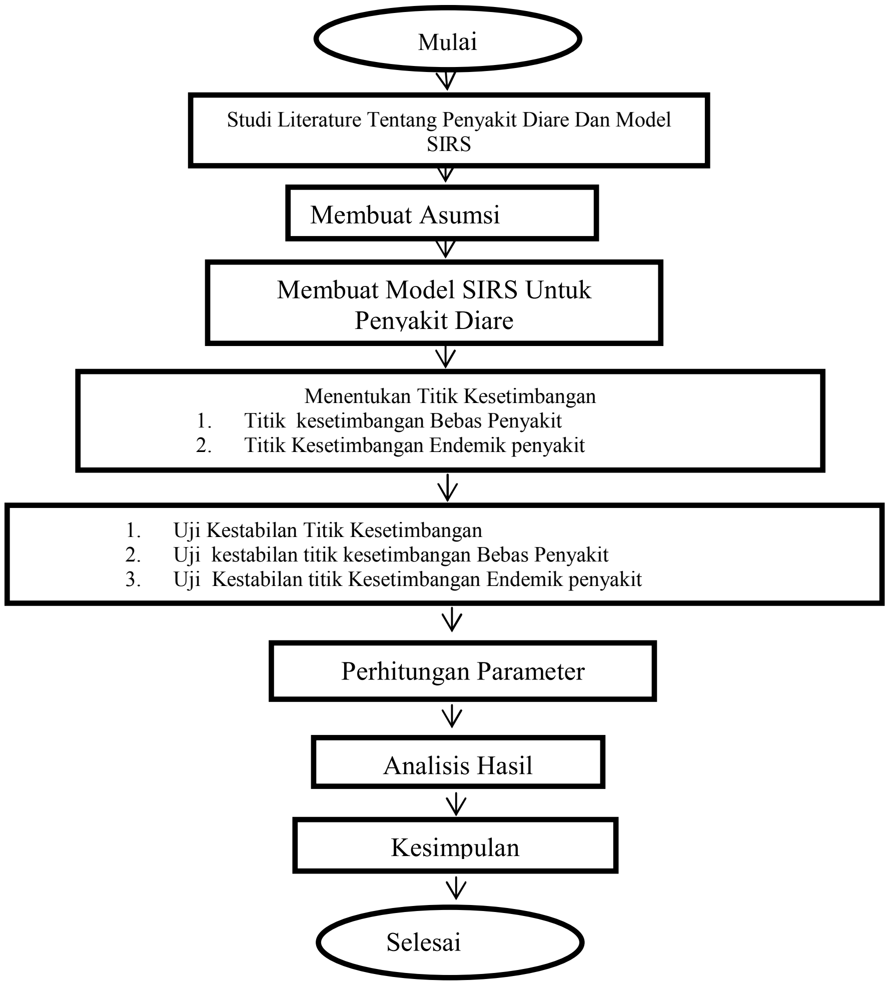
1. Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini di lakukan di Dinas Kesehatan Provinsi Jambi yang beralamat di Jl. RM Noor AdmadibrataNo. 8, Telanaipura, Kota Jambi, Jambi.

2. Jenis dan Sumber Data

Adapun sumber data pada penelitian ini adalahdata sekunder yang didapatkan dari Dinas Kesehatan Provinsi Jambi, data tersebut berupa data kasus penyakit diare pada balita, data kelahiran individu baru dan jumlah kematian alami. Data yang diambil untuk setiap daerah kabupaten/Kota di Provinsi Jambi tahun 2016.

3. Alur Penelitian



III. HASIL DAN PEMBAHASAN

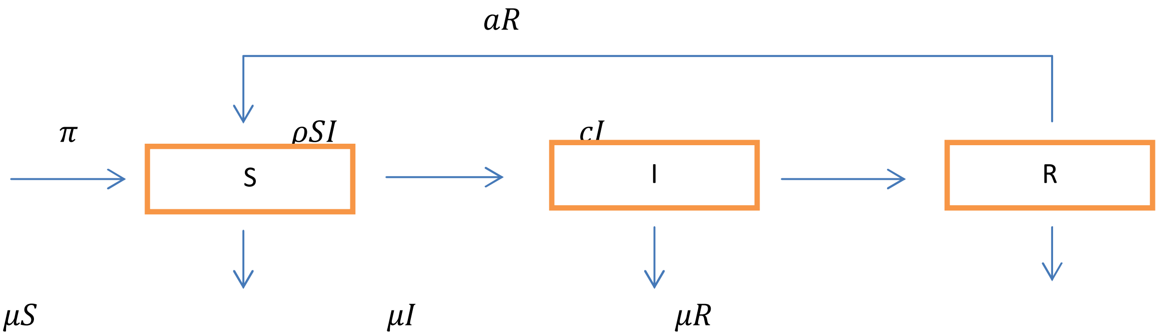
1. Pembentukan Model Matematika *SIRS*

Model populasi SIRS adalah model matematika yang menggambarkan bahwa individu yang rentan terserang penyakit menjadi individu yang terinfeksi penyakit, kemudian sembuh, setelah sembuh individu memperoleh kekebalan sementara terhadap penyakit tersebut. Seiring berjalannya waktu kekebalan tersebut menghilang atau berkurang, mengakibatkan individu yang rentan terhadap penyakit dapat kembali terinfeksi penyakit yang sama [1]. Menyatakan secara umum model epidemik *SIRS* dibagi menjadi tiga kelas yaitu *Susceptible, Infected* dan *Removed.* Dalam pembentukan model penyebaran penyakit diare diperlukan beberapa asumsi. Asumsi-asumsi yang digunakan dalam model penyebaran penyakit diare akut pada balita yaitu:

a. Laju kelahiran dan kematian alami dianggap sama.
b. Populasi penduduk bersifat homogen, artinya setiap individu mempunyai peluang yang sama terserang penyakit diare.
c. Terdapat satu populasi yaitu balita.
d. Hanya terdapat penyakit diare dalam populasi.
e. Individu yang terinfeksi dapat sembuh dari penyakit diare, individu yang sembuh dari penyakit diare akan menjadi rentan kembali.
f. Tidak terdapat imunisasi rotela pada balita.

Dijelaskan ada parameter yang digunakan dalam pembentukan model matematika *SIRS* pada penyebaran penyakit diare akut pada balita di provinsi jambi, yaitu: $\pi =$ Laju kelahiran balita, $\mu =$ Laju kematian alami balita, $\rho =$ Laju kontak balita dari yang rentan ke infeksi, $c =$ Laju kesembuhan balita, $\alpha =$ Laju balita yang rentan kembali, $S =$ Banyaknya balita yang rentan, $I =$ Banyaknya balita yang terinfeksi, $R =$ Banyaknya balita yang sembuh.

Dengan parameter dan asumsi tersebut dapat dibentuk model *SIRS* sebagai berikut:



$$\frac{ds}{dt} = \pi - \mu S - \rho SI + \alpha R \tag{1}$$

Tingkat perubahan populasi balita rentan dalam persamaan (1) parameter π menunjukkan ada balita yang lahir dan tingkat kematian alami konstan μ mengurangi populasi yang rentan. Proporsi tertentu yang rentan terinfeksi pada tingkat terinfeksi ρ tergantung pada populasi yang terinfeksi. Balita yang dipulihkan secara bertahap bergabung dengan kelas yang rentan pada tingkat kehilangan imunitas α.

$$\frac{dI}{dt} = \rho SI - \mu I - cI \tag{2}$$

Tingkat perubahan populasi balita terinfeksi dalam persamaan (2) menunjukkan sebagian dari kelas rentan menjadi terinfeksi dan bergabung dalam kelas terinfeksi. Populasi yang terinfeksi berkurang dengan tingkat kematian konstan μ dan tingkat pemulihan c.

$$\frac{dR}{dt} = cI - \mu R - \alpha R \tag{3}$$

Tingkat perubahan populasi balita sembuh dalam persamaan (3) menunjukkan ketika populasi balita yang terinfeksi pulih pada tingkat c, mereka akan ditambah ke kelas pulih. Balita yang meninggal pada tingkat kematian konstan μ dari kelas yang dipulihkan. Bagian dari populasi balita ini berangsur-angsur kehilangan kekebalannya pada tingkat α dan bergerak lagi ke kelas yag rentan.

2. TitikKesetimbangan Model

Titik kesetimbangan model adalah titik yang digunakan untuk mengetahui nilai dari bilangan reproduksi dasar[5].Diberikan sistem persamaan diferensial $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$ Titik $\hat{x} \in R^n$disebut titik kesetimbangan dari $\dot{\boldsymbol{x}}$= $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$**.** Jika memebuhi $f\ (\hat{x}) = 0$.

Titik kesetimbangan dapat diklarifikasikan menjadi dua yaitu sebagaiberikut:

a. TitikKesetimbanganBebasPenyakit

Titik kesetimbangan didapat jika $\frac{dS}{dt} = 0; \frac{dI}{dt} = 0; \frac{dR}{dt} = 0$. Titik kesetimbangan bebas penyakit *(diseases free equilibrium)* didapat jika $I = 0$ dan $R = 0$. Jika $I = 0$ artinya semua balita tidak dapat terinfeksi penyakit. Jika $R = 0$ artinya tidak ada balita yang sembuh karena tidak ada balita yang terinfeksi. Titik kesetimbangan bebas penyakit dapat dibuktikan menjadi:

Subsitusikan $I = 0$ dan $R = 0$ pada persamaan di bawah ini.

$$\frac{dS}{dt} = 0$$

$$\pi - \mu S - \rho SI + \alpha R = 0$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakitnya adalah $(S, I, R) = \{\frac{\pi}{\mu}, 0{,}0\}$.

b. Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan didapat jika $\frac{dS}{dt} = 0; \frac{dI}{dt} = 0; \frac{dR}{dt} = 0$. Titik kesetimbangan endemik didapat jika $S \neq 0, I \neq 0$ dan $R \neq 0$. Jika $S \neq 0$ artinya semua balita rentan terhadap penyakit diare akut dan dapat terinfeksi penyakit diare. $I \neq 0$ artinya semua balita dapat terinfeksi penyakit diare dan dapat sembuh kembali. $R \neq 0$ artinya semua balita akan sembuh dan dapat terinfeksi kembali jika imunnya berkurang.

Untuk $\frac{dI}{dt} = 0$, $\frac{dr}{dt} = 0$ $\frac{ds}{dt} = 0$

$\rho SI - \mu I - cI = 0$ $ci - \mu r - \alpha r = 0$ $\pi - \mu s - \rho si + ar = 0$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan endemik penyakit adalah: $(S, I, R) = \{\frac{\mu+c}{\rho}, \frac{\pi\rho(\mu+\alpha)-\mu(\mu^2+\mu c+\mu\alpha+\alpha c)}{\rho\mu(\mu+\alpha+c)}, \left(\frac{c(\pi\rho-\mu^2-\mu c)}{\rho(\mu^2+\alpha\mu+c\mu)}\right)\}$.

3. Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan yang menyatakan parameter yang biasa digunakan untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit. R_0adalah rata-rata banyaknya individu rentan yang terinfeksi secara langsung oleh individu lain yang sudah terinfeksi bila individu yang terinfeksi tersebut masuk kedalam populasi seluruhnya masih rentan. Bilangan reproduksi dasar ini diperoleh dengan menentukan nilai eigen matriks Jacobian pada titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit *(disease free equilibrium)* adalah stabila simtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$ dan Titik kesetimbangan endemik *(endemic equilibrium)* ada jika dan hanya jika $R_o > 1$, dan juga titik kesetimbangan tersebut ada, maka titik kesetimbangan tersebut tunggal dan stabil asimtotik lokal[2].

Diperoleh nilai reproduksi dasar pada titik kesetimbangan bebas penyakit $\left(\rho\pi\left(-\mu - \frac{\alpha}{\mu}\right) + \right.$ $\mu 3\mu+2\alpha+2c+\alpha c+\rho\pi-\mu-\alpha+\mu(\mu 2+\mu c+\mu\alpha+\alpha c-\rho\pi+3\mu+c+\alpha$ dan pada titik kesetimbangan endemik adalah $(\mu(+\alpha) + \rho I^*(2\mu + \alpha + c) - (\frac{\mu\rho I^*(\mu+\alpha+c)}{2\mu+\alpha+\rho i^*}$.

4. Uji Kestabilan Model *SIRS*

Uji kestabilan model *SIRS* menggunakan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz yaitu suatu metode yang digunakan untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar secara langsung. Jika persamaan polinom adalah persamaan karakteristik, maka metode ini dapat digunakan untuk menentukan kestabilan dari suatu sistem yaitu menggunakan tabel kriteria kestabilan Routh-Hurwitz:

Tabel 1: Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Variabel	Koefisien					
s^n	a^0	a^2	a^4	a^6	...	a_{n-1}
s^{n-1}	a^1	a^3	a^5	a^7	...	a_n
s^{n-2}	b^1	b^2	b^3	b^4	...	b_n
s^{n-3}	c^1	c^2	c^3	c^4	...	c_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
s^2	e_1	e_2				
s^1	f_1					
s^0	g_1					

a. Uji kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit

$$f(S,I,R) = \pi - \mu S - \rho SI + \alpha R$$

$$g(S,I,R) = \rho SI - \mu I - cI$$

$$h(S,I,R) = cI - \mu R - \alpha R$$

$$\begin{bmatrix} -\mu - \rho I & \rho S & \alpha \\ \rho I & \rho S - \mu - c & 0 \\ 0 & c & -\mu - \alpha \end{bmatrix}$$

Karena dititik kesetimbangan bebas penyakit $I = 0$ dan $R = 0$ sehingga matrik Jacobian berubah menjadi

$$\begin{bmatrix} -\mu & \rho S & \alpha \\ 0 & \rho S - \mu - c & 0 \\ 0 & c & -\mu - \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu & \frac{\rho\pi}{\mu} & \alpha \\ 0 & \frac{\rho\pi}{\mu} - \mu - c & 0 \\ 0 & c & -\mu - \alpha \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mu & \frac{\rho\pi}{\mu} & \alpha \\ 0 & \frac{\rho\pi}{\mu} - \mu - c & 0 \\ 0 & c & -\mu - \alpha \end{bmatrix} = 0$$

Persamaan karakteristik untuk matrik Jacobian yang dievaluasi di titik kesetimbangan bebas penyakit adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \lambda+\mu & -\dfrac{\rho\pi}{\mu} & -\alpha \\ 0 & \lambda-\dfrac{\rho\pi}{\mu}+\mu+c & 0 \\ 0 & -c & \lambda+\mu+\alpha \end{bmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan determinan baris pertama dan baris kedua didapatkan persamaan karakteristiknya adalah:

$$\left((\lambda+\mu)\left(\lambda-\frac{\rho\pi}{\mu}+\mu+c\right)(\lambda+\mu+\alpha)+0+0-(0-0-0)\right)=0$$

$$(\lambda^3+\lambda^2\left(-\frac{\rho\pi}{\mu}+3\mu+c+\alpha\right)+\lambda\left(-\frac{2\mu\rho\pi}{\mu}+2\mu^2+2\mu c-\frac{\alpha\rho\pi}{\mu}+2\alpha\mu+\alpha c+\mu^2\right)+$$

$$(-\frac{\mu^2\rho\pi}{\mu}-\frac{\mu\alpha\rho\pi}{\mu}+\mu^3+\mu^2 c+\mu^2\alpha+\mu\alpha c=0$$

dengan;

$$a_0=1$$

$$a_1=-\frac{\rho\pi}{\mu}+3\mu+c+\alpha$$

$$\alpha_2=-\frac{2\mu\rho\pi}{\mu}+2\mu^2+2\mu c-\frac{\alpha\rho\pi}{\mu}+2\alpha\mu+\alpha c+\mu^2=\rho\pi\left(-\mu-\frac{\alpha}{\mu}\right)+\mu(3\mu+2\alpha+2c)+\alpha c$$

$$a_3=-\frac{\mu^2\rho\pi}{\mu}-\frac{\mu\alpha\rho\pi}{\mu}+\mu^3+\mu^2 c+\mu^2\alpha+\mu\alpha c=\rho\pi(-\mu-\alpha)+\mu(\mu^2+\mu c+\mu\alpha+\alpha c)$$

Semua koefisien persamaan karakteristik lengkap maka berdasarkan **Tabel 1** akan disusun koefisien persamaan karakteristik dalam baris dan kolom pada **Tabel 2**.

Tabel 2: *Array Routh-Hurwitz* Bebas Penyakit (Koefisien)

Variabel	Koefisien	Koefisien
λ^3	1	$\rho\pi\left(-\mu-\frac{\alpha}{\mu}\right)+\mu(3\mu+2\alpha+2c)+\alpha c$
λ^2	$-\frac{\rho\pi}{\mu}+3\mu+c+\alpha$	$\rho\pi(-\mu-\alpha)+\mu(\mu^2+\mu c+\mu\alpha+\alpha c$
λ^1	$\left(-\frac{2\mu\rho\pi}{\mu}+2\mu^2+2\mu c-\frac{\alpha\rho\pi}{\mu}+2\alpha\mu+\alpha c+\mu^2\right)+(\frac{\left(\frac{\mu^2\rho\pi}{\mu}+\frac{\mu\alpha\rho\pi}{\mu}-\mu^3-\mu^2 c-\mu^2\alpha-\mu\alpha c\right)}{-\rho\pi+3\mu+c+\alpha})$	−
λ^0	−	−

dimana,

$$b_1=\frac{a_1a_2-a_0a_3}{\alpha_1}$$

$$b_1=\frac{\left(-\frac{\rho\pi}{\mu}+3\mu+c+\alpha\right)\left(\rho\pi\left(-\mu-\frac{\alpha}{\mu}\right)+\mu(3\mu+2\alpha+2c)+\alpha c\right)-(1)(\rho\pi(-\mu-\alpha)+\mu(\mu^2+\mu c+\mu\alpha+\alpha c)}{-\frac{\rho\pi}{\mu}+3\mu+c+\alpha}$$

$$b_1=\left(\rho\pi\left(-\mu-\frac{\alpha}{\mu}\right)+\mu(3\mu+2\alpha+2c)+\alpha c\right)+(\frac{\left(\rho\pi(-\mu-\alpha)+\mu(\mu^2+\mu c+\mu\alpha+\alpha c\right)}{-\rho\pi+3\mu+c+\alpha})$$

Agar sistem bebas penyakit stabil maka haruslah $b_1 > 0$ sehingga semua koefisien persamaan karakteristik bernilai positif dan semua suku pada kolom pertama **Tabel 2** bernilai positif berdasarkan kriteria kestabilan routh-hurwitz.Sehingga nilai bilangan reproduksi dasar *(basic reproduction number)*R_0adalah nilaib_1 titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil asimtotik jika nilai $b_1 > 1$ yang menunjukkan bahwa pada suatu populasi terjadi penyebaran penyakit.

b. Uji Kestabilan titik kesetimbangan endemik

$f(S,I,R) = \pi - \mu S - \rho SI + \alpha R$

$g(S,I,R) = \rho SI - \mu I - cI$

$h(S,I,R) = cI - \mu R - \alpha R$

$$\begin{vmatrix} -\mu - \rho I & \rho S & \alpha \\ \rho I & \rho S - \mu - c & 0 \\ 0 & c & -\mu - a \end{vmatrix}$$

Karena titik kesetimbangan endemik $S = \frac{\mu+c}{\rho}$ $, I = \frac{(\mu+\alpha)(\pi\rho-\mu^2-\mu c)}{\rho(\mu^2+\alpha\mu+\mu c)}, R = \frac{c(\pi\rho-\mu^2-\mu c)}{\rho(\mu^2+\alpha\mu+c\mu)}$

maka matrik Jacobian berubah menjadi:

$$\begin{vmatrix} -\mu - \rho I^* & \rho(\frac{\mu+c}{\rho}) & \alpha \\ \rho I^* & \rho\left(\frac{\mu+c}{\rho}\right) - \mu - c & 0 \\ 0 & c & -\mu - \alpha \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\mu - \rho I^* & \mu + c & \alpha \\ \rho I^* & 0 & 0 \\ 0 & c & -\mu - \alpha \end{vmatrix}$$

$|\lambda I - A| = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda + \mu + \rho I^* & -\mu - c & -\alpha \\ -\rho I^* & \lambda & 0 \\ 0 & -c & \lambda + \mu + \alpha \end{vmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan determinan baris pertama dan baris kedua sehingga didapatkan persamaan karakteristiknya adalah:

$(\lambda + \mu + \rho I^*)(\lambda)(\lambda + \mu + \alpha) + 0 + (-\alpha)(-\rho I^*)(-c) - \left((\mu + c)(-\rho I^*)(\lambda + \mu + \alpha) - 0 - 0\right) = 0$

$\lambda^3 + \lambda^2(2\mu + \alpha + \rho I^*) + \lambda(\mu^2 + \mu\alpha + 2\mu\rho I^* + \alpha\rho I^* + c\rho I^*) + (\mu^2\rho I^* + \mu\alpha\rho I^* + \mu c\rho I^*) = 0$

Kemudian akan dilihat kestabilan menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz* dengan memisalkan

$a_0 = 1$; $a_1 = 2\mu + \alpha + \rho I^*$; $a_2 = \mu(+\alpha) + \rho I^*(2\mu + \alpha + c)$ dan $a_3 = \mu\rho I^*(\mu + \alpha + c)$

Karena koefisien persamaan karakteristik lengkap maka berdasarkan **Tabel 1** akan disusun koefisien persamaan karakteristik dalam baris dan kolom seperti pada **Tabel 3**

Tabel 3: *Array Routh-Hurwitz* Endemik (Koefisien)

λ^3	1	$\mu(+\alpha)+\rho I^*(2\mu+\alpha+c)$
λ^2	$2\mu+\alpha+\rho i^*$	$\mu\rho I^*(\mu+\alpha+c)$
λ^1	$(\mu(+\alpha)+\rho I^*(2\mu+\alpha+c)-(\frac{\mu\rho I^*(\mu+\alpha+c)}{2\mu+\alpha+\rho i^*})$	$-$
λ^0	c_1	c_2

Dimana,

$b_1=\frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1}=(\mu(+\alpha)+\rho I^*(2\mu+\alpha+c)-(\frac{\mu\rho I^*(\mu+\alpha+c)}{2\mu+\alpha+\rho i^*})$

Agar sistem stabil, maka semua suku kolom pertama tabel *Routh-Hurwitz* harus bertanda positif. Agar semua suku bertanda positif, maka:

$(\mu(+\alpha)+\rho I^*(2\mu+\alpha+c)-(\frac{\mu\rho I^*(\mu+\alpha+c)}{2\mu+\alpha+\rho i^*})>1.$

5. AnalisisHasil

Pada studi kasus model epidemik SIRS di Provinsi Jambi hanya menggunakan satu populasi. Adapun perhitungan parameter yang digunakan dalam model *SIRS* pada penyakit diare akut ini dilakukan pada populasi balita. Laju kelahiran balita dinotasikan dengan π, dapat dihitung dari jumlah individu baru per unit waktu. Berdasarkan data yang di ambil dari Dinas Kesehatan Provinsi Jambi, jumlah individu yang baru lahir di Provinsi Jambi pada tahun 2016 yaitu 67429 jiwa. Jadi rata-rata kelahiran individu baru per bulan adalah 5619,08 jiwa atau $\pi=5619{,}08$ jiwa per bulan.

Laju rentan ke terinfeksi di hitung dari $\frac{1}{Jumlah\ balita\ rentan\ \times masa\ pemulihan}$, semua individu baru yang lahir termasuk kedalam individu yang rentan dan rata-rata masa pemulihan untuk penyakit diare adalah 5-7 hari atau 0,2333 bulan, jadi $\rho=\frac{1}{5619{,}08\ x\ 0{,}2333}=\frac{1}{1310{,}93}=0{,}00076\ jiwa/bulan$. Laju kematian alami diestimasi berdasarkan rata-rata angka harapan hidup. Berdasarkan data dari Badan Pusat Statistik Provinsi Jambi sebesar 70,76 tahun (BPS Provinsi Jambi) Jadi laju kematian adalah sebesar $\mu=\frac{1}{\text{angka harapan hidup}}=\frac{1}{70{,}76\text{ tahun}}=\frac{1}{849{,}12}=0{,}001176/\text{bulan}$. Rata-rata masa pemulihan untuk penyakit diare pada balita 5-7 hari (Dinkes RI) atau 0,2333 bulan, sehingga laju pemulihan balita $c=\frac{1}{\text{masa pemulihan}}=\frac{1}{0{,}2333}=4{,}28$. Tingkat balita kehilangan kekebalan atau penurunan imun sehingga balita akan menjadi rentan kembali terhadap penyakit, maka laju rentan kembali adalah sebesar $\alpha=\frac{1}{\text{masa rentan kembali}}=\frac{1}{6\text{ bulan}}=0{,}167/\text{bulan}$.

Tahun 2016 jumlah individu baru Provinsi Jambi sebanyak 67.429 jiwa adalah termasuk jumlah populasi S *(Susceptible)* karena setiap individu baru yang lahir kemungkinan rentan terhadap penyakit diare. Studi kasus penyebaran penyakit daire akut memiiki parameter sehingga didapatkan formula model *SIRS* untuk kasus penyakit Diare Akut di Provinsi Jambi pada tahun 2016 sebagai berikut:

$\frac{dS}{dt} = 5619{,}08 - 0{,}001176S - 0{,}00076SI + 0{,}167R \qquad S = 67429$

$\frac{dI}{dt} = 0{,}00076SI - (0{,}00117 - 4{,}28)I \qquad I = 22485$

$\frac{dR}{dt} = 4{,}28I - (0{,}001176 - 0{,}167)R \qquad R = 14615$

Berdasarkan model epidemik *SIRS* pada penyakit diare akut pada balita di Provinsi Jambi yang telah diperoleh dua titik kesetimbangan dan dua nilai reproduksi dasar, yaitu:

Titik kesetimbangan bebas penyakit pada model *SIRS* memiliki nilai sebesar$((S, I, R) = (\,398.177{,}0{,}0)$. Sedangkan untuk titik kesetimbangan endemik penyakit memiliki nilai sebesar $(S, I, R) = (469, 15.036, 382.671)$.

Bilangan reproduksi dasar untuk titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu sebesar:

$$R_0 = \left(\rho\pi\left(-\mu - \frac{\alpha}{\mu}\right) + \mu(3\mu + 2\alpha + 2c) + \alpha c\right) + \left(\frac{(\rho\pi(-\mu - \alpha) + \mu(\mu^2 + \mu c + \mu\alpha + \alpha c)}{-\rho\pi + 3\mu + c + \alpha}\right)$$

$R_0 = -605 < 1$

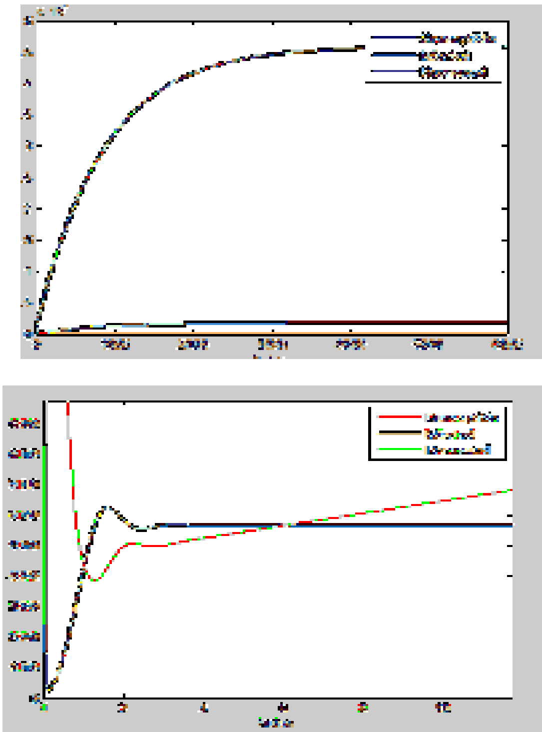
Bilangan reproduksi dasar untuk titik kesetimbangan endemik penyakit yaitu sebesar:

$R_0 = (\mu(+\alpha) + \rho I^*(2\mu + \alpha + c) - (\frac{\mu\rho I^*(\mu+\alpha+c)}{2\mu+\alpha+\rho i^*})$

$$R_0 = 610 > 1$$

Artinya titik kesetimbangan bebas penyakit memiliki $R_0 < 1$ maka sistem stabil asimtotik local berarti bahwa pada populasi balita di Provinsi Jambi tidak ada yang terinfeksi dan tidak ada yang dapat menularkan penyakit diare akut dan titik kesetimbangan endemik penyakit memiliki $R_0 > 1$ maka sistem stabil asimtotik lokal berarti setiap individu terinfeksi dapat menularkan penyakit diare akut kepada rata-rata dari satu individu rentan sehingga dalam jangka waktu tertentu penyakit menyebar dalam populasi.

Jika nilai-nilai parameter disubtitusikan ke persamaan (1) sampai persamaan (3) dapat dibuat plot model endemik SIRS untuk penyebaran penyakit diare akut pada balita di Provinsi Jambi sebagai berikut:



Gambar 1: Model Epidemik *SIRS*

Berdasarkan **Gambar 1** terlihat proporsi balita rentan yang diwakili oleh kurva berwarna merah mula-mula menurun kemudian dalam jangka waktu tertentu mengalami peningkatan. Untuk proporsi balita terinfeksi yang diwakili kurva berwarna kuning mula-mula meningkat kemudian dalam jangka waktu tertentu mengalami penurunan. Hal ini dapat disebabkan karena ada perpindahan individu dari kelas balita yang terinfeksi ke kelas balita yang sembuh. Untuk proporsi balita sembuh yang diwakili kurva berwarna hijau yang mula-mula meningkat kemudian daam jangka waktu tertentu mengalami penurunan. Hal ini dapat disebabkan juga karena ada perpindahan individu dari kelas balita yang sembuh ke kelas balita yang rentan kembali.

IV. KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Model yang di dapat dari Model Epidemik *SIRS* pada penyebaran penyakit diare akut pada balita di Provinsi Jambi

$\frac{ds}{dt} = \pi - \mu S - \rho SI + \alpha R$

$\frac{dI}{dt} = \rho SI - \mu I - cI$

$\frac{dR}{dt} = cI - \mu R - \alpha R$

2. Titik kesetimbangan bebas penyakit yang di dapat dari model *SIRS* adalah$(S, I, R) = \big((398.177), (0), (0)\big)$ dan titik kesetimbangan endemik penyakit di dapat dari model *SIRS* $(S^*, I^*, R^*) = ((469)(15.036)(382.671)$.
3. Titik kesetimbangan bebas penyakit memiliki bilangan reproduksi dasar$R_0 < 1$ yang artinya penyakit diare akut pada balita tidak ada yang terinfeksi dan tidak ada yang dapat menularkan penyakit diare akut. Sedangkan titik kesetimbangan endemik memiliki bilangan reproduksi dasar $R_0 > 1$ yang artinya setiap individu terinfeksi dapat menularkan penyakit diare, sehingga dalam jangka waktu tertentu penyakit menular dalam populasi.

V. DAFTAR PUSTAKA

[1] Enatsu, Y., Messina, E., Nakata, Y., Muroya, Y., Russo, E., & Vecchio, A., 2000,*Global Dynamics of a Delayed SIRS Epidemic Models With a Wide Class of Non linear Incidence Rates,* Journal of Applied Mathematics And Computing.

[2] Rost, G., & Wu, J. 2008. SEIR Epidemiological Model with Varying Infectivity and Infinite Delay.

[3] Tri Onggo, IP. 2015. *92 Pengobatan mandiri dirumah anda.* Yogyakarta; Bangkit.

[4] Widowati dan Sutimin. 2007. Pemodelan Matematika. Semarang: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Diponegoro.

[5] Wiggins, Stephen. 2003. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos: Second Edition.* New York: Springer-Verlag.