EVIEW NILAI RATA-RATA OPERATOR GAYA POTENSIAL STEP PADA PARTIKEL SATU DIMENSI DALAM TINJAUAN PERSAMAAN SCHRÖDINGER, KLEIN-FOCK-GORDON, DAN DIRAC

Alfin Saputra Gedje Dima*, Herry F. Lalus, Fakhruddin
Pendidikan Fisika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Nusa Cendana, Kupang, 8500, Indonesia
*email: alfingedjedima2709@gmail.com

ABSTRAK

Telah dilakukan analisis review untuk menentukan nilai rata-rata operator gaya partikel pada potensial step satu dimensi dalam tinjauan persamaan Schrödinger, Persamaan Klein-Fock-Gordon dan persamaan Dirac. Review ini dimaksudkan untuk memberikan penjelasan secara terperinci dan mudah dipahami. Menentukan operator gaya pada kasus ini digunakan teorema Ehrenfest yang akan dianalisis untuk mencari nilai rata-rata operator gaya itu sendiri dengan menggunakan formula nilai rata-rata suatu operator. Hasil yang diperoleh dari review, memberikan bahwa nilai rata-rata operator gaya memiliki hubungan dengan kerapatan probabilitas dari masing-masing kasus dengan kajian masing-masing persamaan gelombang. Nilai rata-rata operator gaya untuk kasus ini dalam kajian persamaan Schrödinger dan Persamaan Dirac memberikan hasil yang mirip, dikarenakan kerapatan probabilitas masing-masing persamaan gelombang adalah fungsi yang kontinu pada titik batas. Berbeda dengan kasus yang sama dengan kajian persamaan Klein-Fock-Gordon diperoleh bahwa nilai rata-rata operator gaya tidak dapat digunakan formula umum nilai rata-rata, karena kerapatan probabilitasnya merupakan fungsi yang diskontinu. Sehingga diberikan solusi menggunakan persamaan Fescbach-Villars untuk menentukan operator gaya pada kasus ini dalam tinjauan persamaan Klein-Fock-Gordon.

Kata Kunci: *Operator gaya eksternal klasik ; Persamaan Schrödinger; Persamaan Klein-Fock-Gordon; Persamaan Dirac; Teorema Ehrenfest*

ABSTRACT

[Title: Review of The Analysis on The Mean Value of Step Potential Force Operators One-Dimensional Particles in A Review of The Schrödinger, Klein-Fock-Gordon, and Dirac Equations] *A review analysis had been conducted to determine the mean value of particle force operator in one-dimensional potential step in the review of Schrödinger equation, Klein-Fock-Gordon equation and Dirac equation. This research is intended to provide a detailed and easy-to-understand explanation. Determining the force operator in this case uses the Ehrenfest theorem which will be used to find the average value of the force operator itself using the mean value formula of an operator. The results obtained from the research provide that the mean value of the force operator has a relationship with the probability density of each case with the study of each wave equation. The mean value of the force operator for this case in the study of the Schrödinger equation and Dirac equation gives related results because the probability density of each wave equation is a continuous function at the boundary point. In contrast to the same case with the study of the Klein-Fock-Gordon equation, it is found that the average value of the force operator cannot be used the general mean value formula, because the probability density is a discontinuous function. Therefore, a solution is given using the Feshbach-Villars equation to determine the force operator in this case in terms of the Klein-Fock-Gordon equation.*

Keywords: *Classic external force operator; Schrödinger equation; Klein-Fock-Gordon equation; Dirac equation; Ehrenfest theorem*

PENDAHULUAN

Suatu operator dalam sistem kuantum memiliki kesamaan dengan besaran pada sistem klasik dalam hal relasi matematisnya. Hal ini, sesuai dengan teorema Ehrenfest yang memberikan hubungan turunan ekspektasi (nilai rata-rata) suatu operator terhadap waktu yang memberikan hasil yang "sedekat mungkin" dengan persamaan klasik yang sesuai (Gilmore, 2010; D. J. Griffiths, 2005). Dengan demikian, untuk menentukan nilai rata-rata operator gaya dalam hal ini gaya eksternal klasik, maka perlu dicari definisi gaya pada persamaan klasik. Pada persamaan klasik ditemukan dua definisi matematis (Abdullah, 2007). Pertama, gaya merupakan penyebab perubahan energi potensial (dV) pada benda pada rentang perubahan posisi (dx) benda, yang secara matematis dinyatakan sebagai berikut:

$$F = -\frac{dV}{dx} \quad (1)$$

Kedua, gaya sebagai penyebab adanya perubahan momentum (dP)pada suatu benda dalam selang waktu tertentu (dt), yang dinyatakan sebagai berikut:

$$F = -\frac{dp}{dt}. \quad (2)$$

Dengan dua definisi matematis di atas, dalam Review ini digunakan persamaan hubungan gaya dengan momentum. Di mana untuk formulasi umum teorema Ehrenfest (Gilmore, 2010) diberikan oleh

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = \left\langle\frac{\partial\hat{A}(x,t)}{\partial t}\right\rangle + \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{A}]\rangle \quad (3)$$

Sebagaimana $\langle\hat{A}\rangle$ merupakan simbol nillai rata-rata untuk sebuah operator $\hat{A}$, $\hbar$ merupakan simbol untuk konstanta Plank tereduksi, $\hat{H}$ adalah operator Hamiltonian atau total energi sistem, dan $[\hat{H},\hat{A}]$ menunjukkan sifat komutatif sebuah operator terhadap Hamiltonian-nya. Untuk nilai rata-rata turunan waktu dari sebuah operator dapat juga didefinisikan sebagai berikut (De Vincenzo, 2015):

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = \frac{i}{\hbar}\left(\langle\hat{H}\psi,\hat{A}\psi\rangle - \langle\hat{H}\hat{A}\rangle\right) + \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{A}]\rangle \quad (4)$$

Dengan $\hat{A}$ merupakan sebuah operator, $\partial\psi/\partial t = -i\hat{H}\psi/\hbar$, dan $[\hat{H},\hat{A}] = \hat{H}\hat{A} - \hat{A}\hat{H}$ menyatakan sifat komutatif sebuah operator terhadap hamiltoniannya. Untuk $\psi, \hat{H}\hat{A}\psi = \hat{H}\hat{A}$ dan $\langle\psi,[\hat{H},\hat{A}]\psi\rangle = \langle[\hat{H},\hat{A}]\rangle$.

Dalam Review bertujuan menganalisis partikel kuantum satu dimensi di dalam potensial step (*step potential*) yaitu

$$V(x) = V_0\Theta(x), \quad (5)$$

Di mana $x \in \mathbb{R}$, V_0 merupakan konstanta, dan $\Theta(x)$ merupakan fungsi langkah Heaviside dengan syarat $(\Theta(x > x) = 1)$ dan $\Theta(x < 0) = 0$. Untuk fungsi gelombangnya diberikan oleh, $\Psi = \Psi(x,t)$, dan bisa dinormalisasikan dengan $\Psi(x \to \pm\infty, t) = 0$, dan untuk produk skalarnya $\langle\Psi,\Psi\rangle = 1$.

Untuk mencari nilai rata-rata dari operator gaya sebelumnya harus mendefinisikan operator gaya itu sendiri yaitu dengan berpatokan pada persamaan (1) maka

$$\hat{F} = -\frac{dV(x)}{dx} = -V_0\delta(x) \quad (6)$$

Di mana $\delta(x)$ merupakan fungsi delta Dirac sebagai turunan fungsi Heaviside terhadap posisi. Sehingga dengan menggunakan formula nilai rata-rata mekanika kuantum

$$\langle\hat{F}\rangle_A = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\hat{F}\rho_A, \quad (7)$$

Dengan $A = S; KFG; D$, di mana S adalah persamaan gelombang Schrödinger, KFG adalah persamaan Klein-Fock-Gordon, dan D adalah persamaan gelombang Dirac, ρ_A adalah nilai kerapatan probabilitas dari tiap persamaan gelombang. Dengan demikian, gaya yang dialami partikel merupakan penyebab perubahan perilaku pada partikel dalam hal ini perubahan potensial dan momentum pada partikel yang diberikan oleh fungsi gelombang. Dengan berfokus pada Teorema Ehrefest, maka penting untuk mencari penyetaraan persamaan klasik besaran gaya dengan operator gaya pada persamaan kuantum demi membuktikan Teorema Ehrenfest dalam menentukan nilai rata-rata operator kuantum yang tidak biasa yaitu operator gaya khususnya untuk persamaan KFG dan persamaan Dirac, karena dalam mekanika kuantum operator yang sering dijumpai adalah operator posisi $(\hat{x})$, operator momentum $(\hat{P})$ dan operator kecepatan $(\hat{v})$. Perihal, nilai rata-rata operator gaya untuk persamaan Schrödinger dan persamaan Dirac sudah ada yang melakukan penelitian ini seperti yang dilakukan oleh De Vincenzo (De Vincenzo, 2015, 2021) dan untuk nilai rata-rata operator gaya pada persamaan Klein-Fock-Gordon (KFG) pertama kali diberikan oleh penelitian De Vincenzo (De Vincenzo, 2021, 2023), Sebagaimana ketiga persamaan ini menjadi dasar dalam mempelajari mekanika kuantum, maka dilakukan analisis review untuk nilai rata-rata operator gaya partikel pada step potensial menurut ketiga persamaan gelombang. Tujuan dari review ini adalah untuk memberikan penjelasan yang terperinci untuk meningkatkan pemahaman pada persamaan-persamaan yang diberikan pada referensi utama review ini (De Vincenzo, 2021).

METODE

Untuk menentukan nilai rata-rata operator gaya pada review ini, digunakan Teorema Ehrefest yang memberikan solusi jembatan mekanika klasik dengan mekanika kuantum. Kuantitas ini dapat dicari dengan menganalisis perilaku partikel yang berada pada potensial step melalui analisis operator Hamiltonian yang menjadi sebuah alat untuk menganalisis fungsi gelombang partikel. Dengan analisis ini, akan memberikan suatu fungsi kerapatan probabilitas yang memberikan peluang keberadaan partikel dalam suatu ruang kuantum, fungsi kerapatan probabilitas diberikan oleh fungsi gelombang yang mengisyaratkan kekontinuitasan partikel pada tiap kasus. Untuk mencari operator gaya dari kasus pada review ini digunakan Teorema Ehrenfest, yang akan dikerjakan dengan operator Hamiltonian demi penyetaraan persamaan klasik dan kuantum untuk operator gaya. Setelah menemukan operator gaya maka dilakukan perhitungan rata-rata operator gaya yang dialami partikel dalam potensial step yang mengakibatkan perubahan momentum partikel dalam kurang waktu tertentu.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Kasus Schrödinger

Partikel yang berada pada step potensial, diasumsikan bergerak dari daerah $x < 0$ menuju daerah $x > 0$. Pada daerah $x < 0$, partikel bergerak bebas dan ketika partikel bergerak dan berinteraksi dengan step potensial di sini, terdapat pengaruh potensial sehingga mengakibatkan adanya partikel yang dipantulkan dan ditransmisikan. Sehingga untuk kasus ini, berlaku persamaan Schrödinger

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \phi(x)\psi \tag{8}$$

Sebagaimana $\hat{H}$ merupakan energi total system maka, energi total diberikan oleh penjumlahan dari energi potensial dan energi kinetik.

Dengan adanya interaksi antara partikel dan step potensial mengakibatkan adanya perubahan momentum pada partikel dengan perubahan ini mengindikasikan adanya gaya. Dualisme partikel-gelombang memberikan suatu fungsi yang memuat segala informasi pada partikel yang disebut fungsi gelombang (ψ) memiliki perubahan arah ketika berinteraksi dengan step potensial di mana adanya partikel yang memantul dan adanya partikel yang ditransmisikan sebagai akibat dari energi partikel $E > V_0$ untuk partikel yang memiliki energi $E > V_0$ diteruskan dan fungsi gelombang akan meluruh secara eksponensial. Dengan memang pada syarat fungsi kontinuitas maka fungsi gelombang dan turunannya harus kontinu pada titik batas $x = 0$ untuk memastikan bahwa partikel yang sama ditemukan pada kedua daerah tadi. Dengan syarat tersebut diperoleh bahwa fungsi gelombang untuk kasus ini adalah fungsi yang kontinu $\big(\psi(0-,t) = \psi(0+,t) = \psi(0,t)\big)$, maka dengan sendirinya kerapatan pribabilitasnya adalah fungsi kontinu $\big(\rho_S(0-,t) = \rho_S(0+,t) = \rho_S(0,t)\big)$.

Selanjutnya, dengan operator Hamiltonaian atau energi total sistem dikerjakan pada Teorema Ehrenfest. Maka persamaan (8) dikerjakan pada persamaan (4), sehingga

$$\begin{aligned}\frac{d\langle\hat{p}\rangle_S}{dt} &= \frac{i}{\hbar}\big(\langle\hat{H}\psi,\hat{p}\psi\rangle - \langle\hat{H}\hat{p}\rangle\big) \\ &\quad + \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{p}]\rangle.\end{aligned} \tag{9}$$

Dengan $A = \hat{p}$, dalam hal ini $\hat{p}$ merupakan operator momentum. Melalui operasi matematis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\langle\hat{H}\psi,\hat{p}\psi\rangle &= i\hbar\frac{\hbar^2}{2m}\int_R \frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}dx \\ &\quad - i\hbar\int_R \phi(x)\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx\end{aligned}$$

$$\langle \hat{H}\hat{p} \rangle = i\hbar \frac{\hbar^2}{2m} \int_R \psi^* \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} dx - i\hbar \int_R \phi(x) \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x}\, dx$$

$$\langle \hat{H}\psi, \hat{p}\psi \rangle - \langle \psi, \hat{H}\hat{p}\psi \rangle = i\hbar \frac{\hbar^2}{2m} \left(\left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right] - \left[\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] \right) \Bigg|_{0-}^{0+}, \quad (10)$$

dengan melihat pada prinsip bahwa untuk fungsi gelombang yang menuju tak hingga dalam hal ini menuju $0+$ akan menuju nol, sehingga $i\hbar \frac{\hbar^2}{2m} \left(\left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right] - \left[\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] \right) \Big|_{0-}^{0+} + 0$.

Selanjutnya mengerjakan suku kedua yaitu $\langle [\hat{H}\hat{p}] \rangle$, dengan menggunakan sifat komutatif antar operator yang Hermitian diperoleh

$$\langle [\hat{H}\hat{p}] \rangle = i\hbar \int_R \psi^* \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \psi\, dx = i\hbar \left\langle \frac{d\phi(x)}{dx} \right\rangle \equiv -i\hbar \langle \hat{F} \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle = \langle \hat{F} \rangle_S = \left\langle -\frac{d\phi(x)}{dx} \right\rangle. \quad (11)$$

Dengan melihat persamaan (6), maka

$$\hat{F}_S = -V_0 \delta(x) \quad (12)$$

Akhirnya, dengan diperoleh nilai operator gaya, maka untuk mencari nilai rata-rata operator gaya digunakan formula nilai rata-rata yang diberikan persamaan (7)

$$\langle \hat{F} \rangle_S = -V_0 \int_R \delta(x)\, \rho_S(x,t)\, dx \quad (13)$$

Karena kerapatan probabilitas kasus ini, adalah fungsi kontinu maka dapat diperoleh

$$\langle \hat{F} \rangle_S = -V_0 \int_{-\infty}^{\infty} -V_0 \rho_S(0,t) \quad (14)$$

Jadi, nilai rata-rata operator gaya eksternal klasik pada partikel yang berada dalam system non-relativistik potensial step dalam tinjauan persamaan Schrödinger adalah $\langle \hat{F} \rangle_S = -V_0 \rho_S(0,t)$.

Kasus Klein-Fock-Gordon

Persamaan Klein-Fock-Gordon adalah persamaan Hamiltonian dari persamaan Klein-Gordon, yang merupakan persamaan orde dua (Amrulloh, 2021; Khan & Rasheed, 2015) . Sehingga dengan demikian, energi total system akan menghasilkan energi positif dan negatif sebagai akibat dari akar kuadratnya. Sehingga diberikan Solusi yaitu persamaan Klein-Fock-Gordon diubah ke bentuk orde pertama dalam waktu yang sering dikenal dengan persamaan Feshbach-Villars (Feshbach & Villars, 1958; Greiner, 2000; Merad et al., 2000; Wachter, 2010) Persamaan Klein-Fock-Gordon diberikan oleh

$$i\hbar \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + mc^2 \Psi + \phi^2 \Psi. \quad (15)$$

Persamaan (15), terdiri atas dua komponen vector fungsi gelombang yaitu

$$\Psi = \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \psi + \frac{1}{mc^2} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \phi \right) \psi \\ \psi - \frac{1}{mc^2} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \phi \right) \psi \end{bmatrix}, \quad (16)$$

fungsi gelombang yang memiliki dua komponen vektor Ψ memiliki hubungan dengan fungsi gelombang satu komponen ψ sebagai berikut:

$$\psi = \varphi + \chi, \quad \text{dan} \quad \frac{1}{mc^2} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \phi \right) \psi = \varphi - \chi. \quad (17)$$

Fungsi gelombang dalam kasus in, terdiri atas dua fungsi gelombang yaitu φ dan χ yang untuk persamaan diferensialnya

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi + \chi) + mc^2 \varphi + \phi \varphi, \quad (18)$$

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x}(\varphi+\chi) - mc^2\chi + \phi\chi$$

yang di mana persamaan (18) sebanding dengan persamaan (15) yaitu persamaan Klein-Fock-Gordon. Untuk membentuk persamaan Hamiltonian orde satu diperkenalkan matriks Pauli 2×2,

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \hat{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks ini identic denga matriks Pauli, namun tidak bekerja dalam ruang spin, dengan hubungan aljabar

$$\hat{\sigma}_k^2 = \hat{1}, \qquad \hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_l = -\hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_l = i\hat{\sigma}_m$$

Dengan $k, l, m = 1,2,3$ yang cyclic. Persamaan Klein-Fock-Gordon dalam bentuk Hamiltonian yang merupakan persamaan Feshbach-Villarsc(Feshbach & Villars, 1958) dalam dituliskan sebagai berikut:

$$\hat{H}_{KFG}\Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\sigma_3 + i\sigma_2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + mc^2\sigma_3 + \phi(x)\right)\Psi \tag{19}$$

Penggunaan matriks Pauli ini, dikarenakan pada persamaan Klein-Fock-Gordon taat statistik Fermi-Dirac, yang di mana berlaku prinsip larangan Pauli. Sehingga dengan sendiri partikel yang dikaji adalah partikel Fermion lebih tepatnya pion yang tersusun atas quark dan antiquark (Wittig, n.d.).

Kerapatan probabilitas dari persamaan gelombang pada kasus ini (Baym, 2018; Greiner, 2000; Wachter, 2010), diberikan oleh

$$\rho_{KFG} = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) - \frac{\phi}{mc^2}\psi^*\psi \tag{20}$$

Dari persamaan (11) memberikan nilai kerapatan probabilitas persamaan gelombang Klein-Fock-Gordon $\rho_{KFG} = \Psi^\dagger\sigma_3\Psi = |\varphi|^2 - |\chi|^2$ dalam fungsi gelombang satu komponen. Dengan melihat potensial pada persamaan (5), ketika diplot pada step potensial, maka pada daerah I $(x < 0)$ memberikan $\phi(x) = 0$ dalam hal ini, partikel bergerak bebas, sehingga tidak terjadi interaksi dengan step potensial yang akan menghasilkan gaya. Pada daerah II $(x > 0)$ memberikan $\phi(x) = V_0$, sehingga untuk fungsi gelombang masing-masing daerah dapat dituliskan menjadi

$$\Psi = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \psi + \frac{i\hbar}{mc^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} \\ \psi - \frac{i\hbar}{mc^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} \end{bmatrix} \tag{21}$$

Untuk turunan dari Ψ

$$\Psi_x = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \psi_x + \frac{i\hbar}{mc^2}\frac{\partial\psi_x}{\partial t} \\ \psi_x - \frac{i\hbar}{mc^2}\frac{\partial\psi_x}{\partial t} \end{bmatrix} \tag{22}$$

Persamaan (21) dan persamaan (22) merupakan fungsi gelombang pada daerah I yaitu $x > 0$. Selanjutnya untuk daerah II yaitu $x > 0$ diberikan oleh persamaan yang mirip, hanya saya pada daerah II terdapat variabel potensial $\phi(x)$ dikarenakan adanya interaksi dengan step potensial serta nilai $\phi(x) = V_0$

$$\Psi = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \psi + \frac{i\hbar}{mc^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{V_0}{mc^2}\psi \\ \psi - \frac{i\hbar}{mc^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{V_0}{mc^2}\psi \end{bmatrix} \tag{23}$$

Untuk bentuk turunannya

$$\Psi_x = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \psi_x + \frac{i\hbar}{mc^2}\frac{\partial\psi_x}{\partial t} - \frac{V_0}{mc^2}\psi_x \\ \psi_x - \frac{i\hbar}{mc^2}\frac{\partial\psi_x}{\partial t} + \frac{V_0}{mc^2}\psi_x \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Mengingat bahwa untuk setiap fungsi gelombang dan turunannya harus kontinu pada titik batas, dan ketika diperhatikan akan dengan jelas fungsi gelombang daerah II yaitu $x > 0$ merupakan penggabungan dari fungsi gelombang pada daerah I dengan variabel potensial maka didapatkan kondisi batasnya sebagai berikut:

$$\Psi(0+, t) = \Psi(0-, t) + \frac{1}{2}\frac{V_0}{mc^2}\begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}\psi(0, t) \tag{25}$$

Dan untuk bentuk turunannya menjadi

$$\Psi_x(0+, t) = \Psi_x(0-, t) + \frac{1}{2}\frac{V_0}{mc^2}\begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}\psi_x(0, t) \tag{26}$$

Dari kedua persamaan (25) dan persamaan (26) dapat diketahui bahwa fungsi gelombang dan turunannya tidak kontinu (diskontinu) pada titik batas $(x = 0)$. Dengan demikian, kerapatan probabilitas untuk persamaan Klein-Fock-Gordon dalam kasus ini merupakan fungsi yang diskontinu (L. Chetouani; A. Bounames, 2001; Merad et al., 2000):

$$\rho_{KFG}(0+,t) = \rho_{KFG}(0-,t) - \frac{V_0}{mc^2}\psi^*(0,t)\psi(0,t). \quad (27)$$

Ketidakkontinu kerapatan probabilitas pada kasus ini, dikarenakan partikel pion menciptakan pasangan partikel-antipartikel ketika partikel berinteraksi dengan potensial (Haouat & Chetouani, 2005). Ketika partikel Klein-Fock-Gordon diplotkan pada potensial step, terdapat beberapa rentang kasus, pertama pada rentang $E > V_0 + m,$ rentang ini tidak menyiptakan pasangan partikel-antipartikel. Karena tidak adanya gangguna yang signifikan dari potensial terhdapat energi gelombang partikel. Pasangan partikel-antipartikel memberikan perbedaan kerapatan probabilitas ketika energi partikel dalam rentang $V_0 + m > E < V_0$ dengan kerapatan probabilitas positif dan ketika pada rentang $V_0 > E > V_0 - m$ memberikan kerapatan probabilitas negatif. Selain itu, pada rentang tersebut terjadi proses creation dan annhilation pada pasangan partikel-antipartikel. Penciptaan pasangan partikel dan antipartikel disebabkan adanya gangguan dari potensial. Semakin besar gangguan yang diterima energi partikel semakin bertahan pasangan partikel-antipartikel untuk survive. Pada rentang $V_0 - m < E$, partikel yang tertransmisi terpantul kembali karena adanya gaya dorong oleh potensial. Namun, pada saat yang bersamaan untuk antipartikel akan bertahan dan bergerak ke kanan sebagai gelombang transmisi (Wittig, n.d.).

Sebagai imbas dari kondisi batas di atas maka matriks Pauli merupakan fungsi kontinu di titik batas, di mana

$$(\sigma_3 + i\sigma_2)\Psi(0+,t) = (\sigma_3 + i\sigma_2)\Psi(0-,t), \quad (\sigma_3 + i\sigma_2)\Psi_x(0+,t) = (\sigma_3 + i\sigma_2)\Psi_x(0-,t). \quad (28)$$

Sekarang, untuk menemukan nilai operator gaya dengan berlandaskan pada Teorema Ehrenfest, maka

$$\frac{d\langle\hat{p}\rangle_{KFG}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left(\langle\hat{H}\psi,\hat{p}\psi\rangle - \langle\hat{H}\hat{p}\rangle\right) + \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{p}]\rangle. \quad (29)$$

Untuk $\langle\hat{H}\psi,\hat{p}\psi\rangle - \langle\hat{H}\hat{p}\rangle$

$$\langle\hat{H}\psi,\hat{p}\psi\rangle - \langle\hat{H}\hat{p}\rangle = i\hbar\frac{\hbar^2}{2m}\int_R \psi^*(\hat{1}+\hat{\tau}_1)\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} - \frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\hat{1}\frac{\partial\psi}{\partial x}dx \quad (30)$$

Untuk $\langle[\hat{H},\hat{p}]\rangle = \langle\hat{H}\hat{p}\rangle - \langle\hat{p}\hat{H}\rangle$

$$\langle[\hat{H},\hat{p}]\rangle = i\hbar\int_R \psi^*\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}\psi\, dx = i\hbar\left\langle\frac{d\phi(x)}{dx}\right\rangle \equiv -i\hbar\,\langle\hat{F}\rangle \quad (31)$$

Dengan demikian ketika persamaan (31) diplotkan kembali ke persamaan Teorema Ehrenfest dengan berpegang pada prinsip normalisasi fungsi gelombang diperoleh

$$\frac{d\langle\hat{p}\rangle_{KFG}}{dt} = \langle\hat{F}\rangle_{KFG}. \quad (32)$$

Melihat pada persamaan (32) dapat didefinisikan bahwa nilai rata-rata operator gaya merupakan turunan nilai rata-rata operator momentum terhadap waktu atau minus gradien potensial. Maka dengan mudah, nilai operator gaya yang diberikan adalah

$$\hat{F}_{KFG} = -\frac{d\phi(x)}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(V_0\Theta(x)\right), \quad (33)$$

Karena V_0 adalah konstanta maka tersisa hanya turunan fungsi Heaviside terhadap posisi yang tidak lain adalah delta Dirac:

$$\hat{F}_{KFG} = -V_0\delta(x). \quad (34)$$

Maka, nilai rata-rata dari operator gaya pada kasus ini dalam kajian persamaan Klein-Fock-Gordon diberikan oleh

$$\langle\hat{F}_{KFG}\rangle = \int dx\ \hat{F}_{KFG}\,\rho_{KFG}(x,t)$$

$$\langle\hat{F}_{KFG}\rangle = -V_0\int dx\ \delta(x)\rho_{KFG}(x,t) \quad (35)$$

Karena, kerapatan probabilitas dalam kasus ini merupakan fungsi yang diskontinu (D. Griffiths & Walborn, 1999), maka

$$\int dx\ \delta(x)\rho_{KFG}(x,t) = \frac{1}{2}[\rho_{KFG}(0+,t) - \rho_{KFG}(0-,t)] \quad (36)$$

Sehingga nilai rata-rata operator gaya dalam kasus ini menjadi

$$\langle \hat{F}_{KFG} \rangle = -\frac{V_0}{2}\ [\rho_{KFG}(0+,t) - \rho_{KFG}(0-,t)] \quad (37)$$

Kemudian, dengan melihat persamaan (27), untuk $\rho_{KFG}(0+,t)$ dapat diubah menjadi

$$\langle \hat{F} \rangle_{KFG} = -\frac{V_0}{2}\left[\rho_{KFG}(0-,t) - \frac{V_0}{mc^2}\psi^*(0,t)\psi(0,t). -\rho_{KFG}(0-,t)\right].$$

$$\langle \hat{F} \rangle_{KFG} = \frac{V_0}{2}\frac{V_0}{mc^2}\psi^*(0,t)\psi(0,t). \quad (38)$$

Inilah nilai rata-rata operator gaya klasik eksternal dalam kasus ini.

Pada persamaan (35), diberitahukan bahwa integral yang diberikan pada sisi kiri pada persamaan (36) tidak selalu sama dengan rata-rata diskontinuitas fungsi yang menyertai delta Dirac pada integral tersebut yaitu fungsi ρ_{KFG} yang berada pada sisi kanan dari persamaan (36) yang di mana belum tentu sama dengan $\frac{1}{2}[\rho_{KFG}(0+,t) + \rho_{KFG}(0-,t)]$.

Dengan demikian, dikembangkan pendekatan non-relativistik (Greiner, 1997; Wachter, 2010) dari hasil pada persamaan (35) maupun hasil pada persamaan (37). Untuk melakukan hal ini, pertama-tama fungsi gelombang Kein-Fock-Gordon dituliskan dalam bentuk $\psi(x,t) = \Psi_S(x,t)\exp\left(-\frac{imc^2t}{\hbar}\right)$, dimana Ψ_S adalah fungsi gelombang Schrödinger. Dan oleh karena itu, $\dot{\psi}(x,t) = \left(-i\frac{mc^2}{\hbar}\right)\Psi_s(x,t)\exp\left(-\frac{imc^2t}{\hbar}\right)$ pada batas ini, $\left|i\hbar\,\dot{\Psi}_S\right| \ll mc^2|\Psi_s|$.

Dengan menggunakan batas non-relativistik, kerapatan probabilitas Klein-Fock-Gordon yang diberikan persamaan (27) menjadi

$$\rho_{KFG} = \rho_S - \frac{V}{mc^2}\rho_S. \quad (39)$$

Demikian juga, dengan menggunakan hasil pada persamaan (30)

$$\langle \hat{F} \rangle_{KFG} = \langle \hat{F} \rangle_S + \frac{V_0}{mc^2}\int_R \delta(x)\,\phi(0)\rho_S\,(0,t), \quad (40)$$

Dengan mengingat $\rho_S = \Psi_S^*\Psi_s$, maka $\langle \hat{F} \rangle_{KFG}$ dalam batas non-relativistik, yaitu

$$\langle \hat{F} \rangle_{KFG} = \frac{\mathrm{V}_0}{2}\frac{V_0}{mc^2}\rho_S(0,t), \quad (41)$$

hasil pada persamaan (41) memberikan hasil yang sesuai dengan persamaan (38) yang menunjukkan bahwa pada batas non-relativistik gaya yang dialami partikel adalah sama besar (Greiner, 2000; Wachter, 2010) demikian juga, dengan menggunakan hasil pada persamaan (39)

$$\langle \hat{F} \rangle_{KFG} = \langle \hat{F} \rangle_S + \frac{V_0}{mc^2}\int \delta(x)\phi(0)\rho_S(0,t). \quad (42)$$

Integral terakhir tidak dapat diselesaikan dengan tepat karena $\phi(x)$ tidak kontinu pada $x = 0$. Walaupun demikian, perlu dilakukan pendefinisian ulang nilai integral tersebut sebagai $\phi(0)\rho_S(0,t)$, maka persamaan (42) menjadi

$$\langle \hat{F} \rangle_{KFG} = \int_R \hat{F}\rho_{KFG}\,dx = \langle \hat{F} \rangle_S + \frac{V_0}{mc^2}\phi(0)\rho_S(0,t), \quad (43)$$

Akhirnya, dengan menyamakan hasil yang diberikan oleh persamaan (41) dan persamaan (42), diperoleh

$$\langle \hat{F} \rangle_S = -\left[\phi(0) - \frac{V_0}{2}\right]\frac{V_0}{mc^2}\rho_S(0,t). \quad (44)$$

Hasil terakhir tersebut dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut: pertama, persamaan gelombang Klein-Fock-Gordon satu dimensi dalam bentuk Hamiltonian sepenuhnya setara dengan pasangan persamaan diferensial berikut:

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x^2}(\varphi + \chi) + \phi\varphi + mc^2\varphi, \quad (45)$$

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x^2}(\varphi+\chi) + \phi\chi - mc^2\chi \qquad (46)$$

di mana persamaan diferensial di atas merupakan komponen atas dan bawah vektor kolom Ψ, φ dan χ, yang diberikan dalam persamaan (2). Kemudian, jika mempertimbangkan ansat $\psi = \Psi_S \exp(-i\,mc^2t/\hbar)$, dengan demikian $\dot{\psi} = (-i\,mc^2/\hbar)\psi$ (yang merupakan batas nonrelativistik), diperoleh perkiraan ini, $\varphi = (1-\phi/2mc^2)\psi$ (lihat persamaan (2)). Selain itu di dapat juga bahwa $\varphi + \chi = \psi$ (lihat persamaan (3)). Dengan demikian, untuk medan eksternal yang lemah (hingga orde terendah), $\varphi = \psi$ memenuhi persamaan Schrödinger nonrelativistic tetapi dengan pergantian $\varphi + mc^2 \to \phi$ (lihat persamaan pertama pada persamaan (45)), dan oleh karena itu, $\phi(0) + mc^2 \to \phi(0)$, dan juga $\frac{V_0}{2} + mc^2 \to \phi(0)\left(\equiv \frac{V_0}{2}\right)$ dalam hubungan terakhir ini, dapat ditetapkan nilai $\phi \equiv \frac{V_0}{2}$ pada $x = 0$.

Jadi, nilai rata-rata operator gaya partikel satu dimensi pada potensial step dalam kajian persamaan Klein-Fock-Gordon, yaitu $\langle\hat{F}\rangle = -\frac{V_0}{2}[\rho_{KFG}(0+,t) + \rho_{KFG}(0-,t)]$ atau $\frac{V_0}{2} + \frac{V_0}{mc^2}\psi^*(0,t)\psi(0,t)$. Jika ditinjau pada limit non-relativistik diperoleh nilai rata-rata operator gaya dalam tinjauan persamaan Klein-Fock-Gordon adalah $\langle\hat{F}\rangle_S + \frac{V_0}{mc^2}\phi(0)\rho_S(0,t)$.

Kasus Dirac

Partikel yang memenuhi persamaan Dirac, ketika berada pada step potensial satu dimensi memenuhi persamaan berikut:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -i\hbar c\alpha\hat{p}\Psi + mc^2\beta\Psi + \phi(x)\Psi, \qquad (47)$$

dengan $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}$ yang merupakan energi total system, $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ dan α, β merupakan matriks Dirac 2×2 yang memenuhi relasi aljabar $\hat{\alpha}^2 = \hat{\beta}^2 = \hat{1}$ dan $\hat{\alpha}\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha} = \hat{0}$ (Greiner, 1997; Wachter, 2010). Matriks ini hadir sebagai konsekuensi dari fungsi gelombang pada kasus ini terdiri dari dua komponen. Partikel Dirac yang berinteraksi dengan step potensial memenuhi keadaan batas yaitu fungsi gelombang harus kontinu pada titik batas $x = 0$. Sehingga perilaku partikel dalam hal ini, baik memantul maupun tertransmisi memenuhi $R + T = 1$ (De Vincenzo, 2015; Juherwin, 2015). Kerapatan probabilitasnya adalah fungsi kontinu, sehingga ketika dicari peluang pada daerah yang berbeda merupakan partikel yang sama (De Vincenzo, 2015; Juherwin, 2015). Maka untuk fungsi gelombang $\psi_D(0-,t) = \psi(0+,t) = \psi(0,t)$ dan untuk kerapatan probabilitasnya $\rho_D = (0-,t) = \rho_D(0+,t) = \rho_D(0,t)$.

Selanjutnya, operator Hamiltonian dikerjakan pada persamaan (4) diperoleh

$$\langle\hat{H}\psi,\hat{p}\psi\rangle = \hbar^2c\int_R \frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x}\hat{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x}dx - i\hbar mc^2\int_R \psi^\dagger\hat{\beta}\frac{\partial\psi}{\partial x}dx - i\hbar\int_R \psi^\dagger\phi(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}dx$$

$$\langle\hat{H}\hat{p}\rangle_D = -\hbar^2c\int_R \psi^\dagger\ \hat{\alpha}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dx - i\hbar mc^2\int_R \psi^\dagger\hat{\beta}\frac{\partial\psi}{\partial x}dx - i\hbar\int_R \psi^\dagger\phi(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}dx$$

$$\frac{i}{\hbar}\left(\langle\hat{H}\psi,\hat{p}\psi\rangle - \langle\hat{H}\hat{p}\rangle_D\right) = \frac{i}{\hbar}\left(\hbar^2c\int_R \frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x}\hat{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \int_R \psi^\dagger\ \hat{\alpha}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dx\right), \qquad (48)$$

Dengan menggunakan metode integral pembagian maka persamaan (48) menjadi

$$\frac{i}{\hbar}\left(\langle\hat{H}\psi,\hat{p}\psi\rangle - \langle\hat{H}\hat{p}\rangle_\psi\right) = \frac{i}{\hbar}\left(\hbar^2c\int_R \psi^\dagger\hat{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg|_{0-}^{0+}\right) = \frac{\boldsymbol{i}}{\hbar}\left(i\hbar\psi^\dagger c\hat{\alpha}\hat{p}\psi\big|_{0-}^{0+}\right),$$

$$\frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{p}]\rangle_D = -\int_{-\infty}^{\infty}\psi\frac{d\phi(x)}{dx}\psi^\dagger = \langle\hat{F}\rangle_D. \qquad (49)$$

Dengan mengingat bahwa untuk fungsi gelombang yang bergerak menuju tak hingga akan menuju nol dengan demikian, $\frac{i}{\hbar}\left(i\hbar\psi^{\dagger}c\hat{\alpha}\hat{p}\psi\Big|_{0-}^{0+}\right) = 0$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{p}\rangle = \langle\hat{F}\rangle_D. \qquad (50)$$

Akhirnya, persamaan di atas, dikerjakan pada persamaan (8) menjadi

$$\langle\hat{F}\rangle_D = -V_0\int_R dx\,\delta(x)\,\rho_D(x,t) \qquad (51)$$

Untuk integral fungsi delta Dirac pada kasus ini diperoleh $\int_R dx\,\delta(x) = 1$ untuk fungsi kontinu. Maka untuk hasil akhir dari nilai rata-rata operator gaya eksternal klasik diberikan oleh

$$\langle\hat{F}\rangle_D = -V_0\rho(0,t). \qquad (52)$$

Jadi, nilai rata-rata operator gaya eksternal klasik pada kasus Dirac diberikan oleh $-V_0$ yang mempertimbangkan peluang keberadaan partikel.

Ketiga kasus ini, memberikan perbedaan pada sistem yang berlaku untuk tiap kasus dan partikel yang memenuhi syarat tiap kasus, namun terdapat pula persamaan yaitu potensial yang dikaji, persamaan matematis tiap kasus yang mirip.

KESIMPULAN DAN SARAN

Nilai rata-rata operator gaya pada tiap kasus diperoleh dengan mengerjakan operator Hamiltonian yang sesuai dengan kasusnya yaitu dengan menganalisis kekontinuitasan fungsi kerapatan probabilitas dari tiap kasus. Operator Hamiltonian kemudian dikerjakan pada Teorema Ehrenfest untuk mencari kesetaraan operator gaya eksternal klasik untuk setiap partikel pada tiap kasus yang diperoleh. Dan pada akhirnya dalam mencari nilai rata-rata operator gaya tiap kasus diperoleh dengan mengerjakan melalui formula nilai rata-rata sebuah operator. Di mana untuk nilai rata-rata operator gaya eksternal klasik dalam kajian persamaan Schrödinger, persamaan Dirac, dan persamaan Klein-Fock-Gordon memiliki kesamaan yaitu bergantung pada kerapatan probabilitas dari masing-masing persamaan gelombang. Namun, dalam kasus Schrödinger dan kasus Dirac kerapatan probabilitas yang diberikan adalah fungsi yang kontinu pada titik batas, berbeda dengan kasus Klein-Fock-Gordon kerapatan probabilitas untuk persamaan ini merupakan fungsi yang diskontinu pada titik batas. Review ini, hanya berfokus pada potensial step (potensial tangga;*step potential*) sebagai permasalahan dasar untuk mempelajari perilaku partikel dalam dunia mekanika kuantum, dan masih banyak lagi jenis potensial yang bisa kembali dikaji untuk menentukan nilai rata-rata operator gaya partikel.

DAFTAR PUSTAKA

Abdullah, M. (2007). Fisika Dasar I (edisi revisi). *Bandung: ITB*.

Amrulloh, A. H. K. (2021). STUDI PERSAMAAN KLEIN-GORDON DAN PERSAMAAN DIRAC DALAM SUMUR POTENSIAL PERSEGI GANDA SIMETRI. In *Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim*. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Baym, G. (2018). Lectures On Quantum Mechanics. In J. D. Jackson & D. Pines (Eds.), *Lecture Notes And Supplements In Physics* (Vol. 21, Issue 1, pp. 1–9). CRC Press.

De Vincenzo, S. (2015). Operators and bilinear densities in the Dirac formal 1D Ehrenfest theorem. *Journal of Physical Studies [Initiated by West Ukrainian Physical Society & Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine, and Recognized by European Physical Society]*, *19*, 1003.

De Vincenzo, S. (2021). On the mean value of the force operator for 1D particles in the step potential. *Revista Brasileira de Ensino de Fisica*, *43*(1), 1–6. https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2020-0422

De Vincenzo, S. (2023). General pseudo self-adjoint boundary conditions for a 1D KFG particle in a box. *Physics Open*, *15*. https://doi.org/10.1016/j.physo.2023.100151

Feshbach, H., & Villars, F. (1958). Elementary relativistic wave mechanics of spin 0 and spin 1/2 particles. *Reviews of Modern Physics*, *30*(1), 24–45. https://doi.org/10.1103/REVMODPHYS.30.24

Gilmore, R. (2010). Ehrenfest Theorems. *Physics Department, Drexel University*, *1*(5), 180–182. https://doi.org/10.1007/978-3-540-70626-7_58

Greiner, W. (1997). *Relativistic quantum mechanics Wave equations* (Second Ed.). Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH.

Greiner, W. (2000). *Relativistic quantum mechanics Wave equations* (3rd .Ed). Springer.

Griffiths, D. J. (2005). *Introduction to Quantum Mechanics* (Second Edi). Pearson Education, Inc.

Griffiths, D., & Walborn, S. (1999). Dirac Deltas and Discontinuous Functions. *American Journal of Physics*, 67(5), 446–447. https://doi.org/10.1119/1.19283

Haouat, S., & Chetouani, L. (2005). Pair creation in Feshbach-Villars formalism with two components. *European Physical Journal C*, *41*(3), 297–303. https://doi.org/10.1140/EPJC/S2005-02236-7

Juherwin, M. (2015). *Solusi Numerik Persamaan Dirac Dimensi (1+1) Menggunakan Metode Finite Difference Time Domain (FDTD)*. Universitas Mataram.

Khan, N. A., & Rasheed, S. (2015). Analytical solutions of linear and nonlinear klein-fock-gordon equation. *Nonlinear Engineering*, *4*(1), 43–48. https://doi.org/10.1515/NLENG-2014-0028/HTML

L. Chetouani; A. Bounames. (2001). Solution of the Feshbach–Villars equation for the step potential. *Physics Letters A*, *4*(267), 139–150. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00833-1

Merad, M., Chetouani, L., & Bounames, A. (2000). Boundary conditions for one-dimensional Feshbach–Villars equation. *Physics Letters A*, *267*(4), 225–231. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00107-9

Wachter, A. (2010). *Theoritical and Mathematical Physics : Relativistic Quantum Mechanics*. Springer.

Wittig, C. (n.d.). Introduction to Relativistic Quantum Mechanics . *Https://Curtwittig.Com/*. Retrieved November 14, 2023, from https://curtwittig.com/wp-content/uploads/V.-CH-4.pdf